Különlenyomat a «Matematikai és Fizikai Lapok» XXXIX. kötetéből.
Budapest, 1932.
Sonderabdruck aus «Matematikai és Fizikai Lapok» Band XXXIX.
Budapest 1932.

EGY KÜRSCHÁK-FÉLE ELEMI SZÁMELMÉLETI TÉTEL ÁLTALÁNOSÍTÁSA.

THEISINGER bebizonyította, hogy a harmonikus sor részletösszegei, $\sum_{m=2}^{m=n}\frac{1}{m}$, nem lehetnek egész számok.[1] OBLÁTH általánosította e tételt,[2] amennyiben bebizonyította, hogy $\sum_{m=k}^{m=n}\frac{a_m}{m}$ nem lehet egész szám, ha az a_m-ek pozitív egész számok és $(a_m, m) = 1$. KÜRSCHÁK[3] teljesen elemi bizonyítását adta annak a tételnek, hogy $\sum_{m=k}^{m=n}\frac{1}{m}$ nem lehet egész szám, akármilyen pozitív egész szám is a k és az n.

Ezt a tételt fogjuk általánosítani, amennyiben a $k, k+1, \dots k+n$ speciális számtani sor helyett általánosabb számtani sorokra mutatjuk ki a tételt:

Legyenek a, d, n tetszőleges pozitív egész számok; az

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+d}+\cdots+\frac{1}{a+nd} \tag{1}$$

kifejezés nem lehet egész szám.

A bizonyításnál feltehetjük, hogy a és d relatív prímszámok, mert ha nem azok, úgy legnagyobb közös osztójuk reciprokját (1)-ből kiemelve, a másik tényező ismét (1) alakú, de a és d most relatív prímek. Ha tehát a tétel $(a, d) = 1$ esetben igaz, akkor ellenkező esetben is érvényes.

[1] THEISINGER: Monatshefte für Math. u. Phys., 26. k. (1915) 135. l.
[2] OBLÁTH: Matematikai és Fizikai Lapok, 27. k. (1918) 93. l.
[3] KÜRSCHÁK: Matematikai és Fizikai Lapok, 27. k. (1918) 299. l.

Legyen először $d \geqq 4$; a többi esetet tárgyalásunk végén külön-külön fogjuk elintézni.

A bizonyítás a következő segédtételen alapszik: *az*

$$a + d,\ a + 2d, \dots\ a + nd \tag{2}$$

számok valamelyike osztható oly p^α prímszámhatvánnyal, mely nagyobb n-nél.

Ha a segédtételt bebizonyítottuk, a bizonyítás további menete a következő. Legyen $a + kd$ osztható p^α-val, hol $p^\alpha > n$; akkor nem létezhetik oly k-tól különböző $k' < n$, hogy $a + k'd$ is osztható vele. U. i. $(a, d) = 1$ és $a + kd$ osztható p^α-val, tehát $(d, p) = 1$, mert ha nem, akkor a is osztható p-vel ellentétben avval, hogy $(a, d) = 1$. Azonkivül a sem lehet osztható p^α-val, mert különben kd is osztható lenne vele, ami $(d, p) = 1$ és $k < p^\alpha$ miatt nem lehetséges.

Ha tehát $a + k'd$ is osztható volna p^α-val, akkor

$$(k - k')\, d \equiv 0 \pmod{p^\alpha},$$
$$k - k' \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

lenne, ami $|k - k'| < n$ és $p^\alpha > n$ miatt nem lehetséges.

Most vezessük be az

$$(a + d)(a + 2d) \dots (a + nd) = !\,(a + nd) \tag{3}$$

jelölést.

Ekkor (1)-t ily alakban írhatjuk:

$$\frac{!\,(a + nd) + \dfrac{a.\,!(a + nd)}{a + d} + \dfrac{a.\,!(a + nd)}{a + 2d} + \dots + \dfrac{a.\,!(a + nd)}{a + nd}}{a.\,!(a + nd)} \tag{4}$$

A számláló tagjai egész számok; továbbá az $\dfrac{a.\,!(a + nd)}{a + kd}$ tag az előbbiek szerint p-nek alacsonyabb hatványával osztható, mint a számláló többi tagja és a nevező, tehát (4) nem lehet egész szám. Q. e. d.

E szerint csak a segédtételt kell bebizonyítanunk.

Tegyük fel e tétellel ellentétben, hogy az $a + d, a + 2d, \dots\ a + nd$

sorozat tagjai mind csak $p^\alpha \leqq n$ prímszámhatványokkal oszthatók. Tekintsük az

$$\frac{!\,(a+nd)}{n\,!} \tag{5}$$

kifejezést és vizsgáljuk meg, hogy végső rövidítés után mi marad a számlálóban.

Legyen $\sqrt{n} < p \leqq n$; ekkor a nevezőben p éppen $\left[\frac{n}{p}\right]$-szer fordul elő tényező gyanánt. Itt $[x]$ jelenti azt a legnagyobb egész számot, mely $\leqq x$. A számlálóban, tekintve, hogy $p^2 > n$, feltételünk értelmében minden tényezőben csak legfeljebb első hatványon, még pedig legfeljebb $\left[\frac{n}{p}\right]+1$-szer fordul elő tényezőként. A rövidítés után legfeljebb p marad vissza.

Legyen $\sqrt[3]{n}<p\leqq\sqrt{n}$, akkor a p a nevezőnek $\left[\frac{n}{p}\right]$ tényezőjében fordul elő, ebből $\left[\frac{n}{p^2}\right]$-szer, mint p^2. A számlálóban, tekintve, hogy $p^3 > n$, feltételünk értelmében minden tényezőben legfeljebb második hatványon fordul elő, még pedig összesen legfeljebb $\left[\frac{n}{p}\right]+1$ tényezőben, ebből legfeljebb $\left[\frac{n}{p^2}\right]+1$-szer, mint p^2, tehát rövidítés után legfeljebb p^2 marad a számlálóban.

Ugyanúgy belátható, hogy ha $\sqrt[\alpha+1]{n} < p \leqq \sqrt[\alpha]{n}$, úgy a számlálóban rövidítés után legfeljebb p^α marad vissza. Tehát

$$\begin{aligned} \frac{!\,(a+nd)}{n\,!} &\leqq \prod_{\sqrt{n}<p\leqq n} p \cdot \prod_{\sqrt[3]{n}<p\leqq\sqrt{n}} p^2 \cdots \\ &= \prod_{p_i\leqq n} p_i \cdot \prod_{p_k\leqq\sqrt{n}} p_k \cdot \prod_{p_l\leqq\sqrt[3]{n}} p_l \cdots \end{aligned} \tag{6}$$

Másrészt azonban $d \geqq 4$ miatt

$$\frac{!\,(a+nd)}{n\,!} = \left(\frac{a}{1}+d\right)\left(\frac{a}{2}+d\right)\cdots\left(\frac{a}{n}+d\right) > d^n \geqq 4^n; \tag{7}$$

(6) és (7)-ből

$$4^n < \prod_{p_i\leqq n} p_i \cdot \prod_{p_k\leqq\sqrt{n}} p_k \cdots \tag{8}$$

Be fogjuk bizonyitani, hogy ez nem lehetséges. E célból vizsgáljuk meg a

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{9}$$

binomiális koefficiens prímosztóit.

(9) nyilván osztható minden $n < p \leqq 2n$ prímszámmal, mert a számláló osztható vele, a nevező viszont nem.

Ugyanigy belátható, hogy (9) osztható minden

$$\sqrt[\alpha]{n} < p \leqq \sqrt[\alpha]{2n} \qquad (\alpha \geqq 1)$$

prímszámmal is.

Ugyanis $n!$ összesen $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^{\alpha-1}}\right]$-szer tartalmazza p-t, viszont $(2n)!$ összesen

$$\left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^3}\right] + \cdots + \left[\frac{2n}{p^{\alpha-1}}\right] + 1$$

-szer, tekintve, hogy feltételünk szerint $\left[\frac{2n}{p^\alpha}\right] = 1$. Tehát (9) a p prímszámot összesen

$$1 + \left[\frac{2n}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{2n}{p^{\alpha-1}}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p^2}\right] - \cdots - 2\left[\frac{n}{p^{\alpha-1}}\right] \geqq 1$$

-szer tartalmazza $\left(\text{mivel } \left[\frac{2n}{p^k}\right] \geqq 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$.

Jelöljük az első egész számot, mely $\geqq x$ a $\{x\}$ jellel és legyen

$$a_1 = \left\{\frac{n}{2}\right\}, \; a_2 = \left\{\frac{n}{2^2}\right\}, \ldots, \; a_k = \left\{\frac{n}{2^k}\right\}, \ldots,$$

ahol n tetszőleges egész szám; akkor

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_k \geqq \cdots;$$

továbbá

$$a_k < \frac{n}{2^k} + 1 = 2\,\frac{n}{2^{k+1}} + 1 \leqq 2a_{k+1} + 1;$$

tehát, minthogy a_k és a_{k+1} egész számok,

$$a_k \leqq 2a_{k+1}. \tag{10}$$

Legyen már most m az első szám, amelyre nézve $\frac{n}{2^m} \leqq 1$; akkor $a_m = 1$. Világos, hogy $2a_1 \geqq n$. Továbbá (10) szerint az

$$a_m < y \leqq 2a_m, \quad a_{m-1} < y \leqq 2a_{m-1}, \ldots, \quad a_1 < y \leqq 2a_1$$

intervallumok hiány nélkül fedik be az

$$1 < y \leqq n$$

intervallumot.

Ugyanúgy (10)-ből világos, hogy az

$$[\sqrt[k]{a_m}] < y \leqq [\sqrt[k]{2a_m}], \; [\sqrt[k]{a_{m-1}}] < y \leqq [\sqrt[k]{2a_{m-1}}], \ldots$$
$$[\sqrt[k]{a_1}] < y \leqq [\sqrt[k]{2a_1}]$$

intervallumok hiány nélkül fedik be az

$$1 < y \leqq [\sqrt[k]{n}]$$

intervallumot. A k itt akármilyen egész számot jelent.

Az előbbiekből következik, hogy

$$\mathop{\Pi}_{p_i \leqq n} p_i \cdot \mathop{\Pi}_{p_k \leqq \sqrt{n}} p_k \cdots \leqq \binom{2a_1}{a_1}\binom{2a_2}{a_2}\cdots\binom{2a_m}{a_m}; \tag{11}$$

a jobboldal t. i. többszöröse a baloldalnak. Most kimutatjuk, hogy

$$\binom{2a_1}{a_1}\binom{2a_2}{a_2}\cdots\binom{2a_m}{a_m} < 4^n; \tag{12}$$

ezt, (11)-gyel s (8)-cal egybevetve, eljutunk a kívánt ellentmondáshoz.

Számolással könnyen meggyőződhetünk, hogy (12) igaz $n = 10$-ig. Legyen $n > 10$ s tegyük fel, hogy a tétel igaz minden n-nél kisebb számra; ekkor

$$\binom{2a_1}{a_1}\binom{2a_2}{a_2}\cdots\binom{2a_m}{a_m} < \binom{2a_1}{a_1} 4^{2a_2 - 1}, \tag{13}$$

amihez úgy jutunk, hogy a tételt $2a_2 - 1$-re alkalmazzuk; $2a_2 - 1$-re t. i. a tétel igaz, mivel $n > 2a_2 - 1$ és

$$\left\{\frac{2a_2 - 1}{2}\right\} = a_2, \quad \left\{\frac{2a_2 - 1}{4}\right\} = a_3, \ldots$$

Teljes indukcióval könnyen meggyőződhetünk, hogy $n \geqq 5$-re $\binom{2n}{n} < 4^{n-1}$, tehát (13) szerint

$$\binom{2a_1}{a_1}\binom{2a_2}{a_2}\cdots\binom{2a_m}{a_m} < 4^{a_1-1+2a_2-1}.$$

Mármost nyilvánvaló, hogy $2a_1 \leq n+1$, $2a_2 \leq a_1+1$, és így a fenti kitevő $a_1+2a_2-2 \leq 2a_1-1 \leq n$, q. e. d.

Most még hátra van a $d=1, 2, 3$ speciális esetek vizsgálata.

A $d=1$ eset a KÜRSCHÁK-féle tétel.

A $d=3$ eset s általában ha d páratlan, ugyanúgy bizonyítható, mint a KÜRSCHÁK-féle tétel.

Ugyanis legyen

$$a, \quad a+(2d+1), \quad a+2(2d+1), \ldots \quad a+n(2d+1) \qquad (14)$$

a számtani sor.

Legyen 2^α a 2-nek legmagasabb hatványa, mellyel (14) valamelyik tagja osztható; azt állítjuk, hogy csak egy olyan $a+k(2d+1)$ tag van, mely 2^α-val osztható.

Tegyük fel az ellenkezőjét, hogy t. i. van még egy $a+k_1(2d+1)$ tag is, amely osztható 2^α-val. Akkor

$$a+k\ (2d+1) = x.2^\alpha$$

és

$$a+k_1(2d+1) = y.2^\alpha.$$

Itt x és y az α maximalitása miatt páratlan számok.

Legyen $a+k(2d+1)$ és $a+k_1(2d+1)$ a (14) sor két legkisebb oly tagja, mely 2^α-val osztható.

A két tagot egymásból kivonva:

$$(k_1-k)(2d+1) = 2^\alpha(y-x),$$

és mivel $y-x$ páros, azért

$$k_1 - k \equiv 0 \pmod{2^{\alpha+1}},$$

és így $k_1 \neq k$ miatt:

$$k_1 - k \geqq 2^{\alpha+1}.$$

Azonban $a+(k+2^\alpha)(2d+1)$ osztható 2^α-val és $k_1 > k+2^\alpha$, a mi k_1 minimalitásának ellentmond. A további bizonyítás úgy történik, mint az általános esetben.

Végül legyen $d = 2$; mivel (1)-ben az első tag $\frac{1}{a}$ s a többi kisebb ennél, azért, ahhoz, hogy (1) egész szám lehessen legalább $a+1$ tagból kell hogy álljon, azaz kell, hogy $n \geqq a$ legyen. Tehát az

$$a, \quad a+2, \quad a+4, \ldots \quad a+2n \tag{15}$$

számsorozat utolsó tagja $a+2n \geqq a+2a = 3a$ és a sorozatban minden páratlan szám előfordul, melyre nézve $a \leqq k \leqq 3a$ (mivel $(a, d) = 1$ és a páratlan).

Előfordul tehát köztük 3 valamilyen hatványa is. Ha tehát 3^α a 3-nak legmagasabb hatványa, mellyel (15) valamelyik tagja osztható, úgy $3^\alpha \geqq a$ és 3^α is előfordul (15) tagjai között; de akkor nem lehet, hogy a sorozat egy másik tagja is osztható legyen 3^α-val, mert ekkor $3^\alpha + 2.3^\alpha = 3^{\alpha+1}$ is előfordulna (15)-ben, ami 3^α maximalitása miatt nem lehetséges. A további következtetés úgy történik, mint az általános esetben.

Hasonló módon, de kissé hosszabb számításokkal bebizonyíthatjuk az utóbb tárgyalt speciális esetekre is a következő tételt:

Az

$$a, \quad a+d, \ldots \quad a+nd$$

számtani sorban van olyan $a+kd$ tag, mely egy p prímszámot magasabb hatványon tartalmaz, mint a többi tag.

Ugyancsak be lehet bizonyítani a speciális esetekre is, természetesen $d = 1$ kivételével, az általános esetre bizonyított segédtételünket is.

Obláth tételének általánosítása, hogy t. i.

$$\frac{a_0}{a} + \frac{a_1}{a+d} + \frac{a_2}{a+2d} + \cdots + \frac{a_n}{a+nd}$$

nem lehet egész szám, ha $(a_k, a+kd) = 1$, az ő módszerével bizonyítható.

Erdős Pál.

VERALLGEMEINERUNG EINES ELEMENTAR-ZAHLENTHEORETISCHEN SATZES VON KÜRSCHÁK.

Herr THEISINGER bewies, dass $\sum_{m=2}^{m=n} \frac{1}{m}$ für keinen Wert von n eine ganze Zahl darstellt. Herr OBLÁTH gab eine Verallgemeinerung dieses Satzes, indem er bewies, dass $\sum_{m=2}^{m=n} \frac{a_m}{m}$ keine ganze Zahl sein kann, wenn $(a_m, m) = 1$ ist. KÜRSCHÁK bewies elementar, dass $\sum_{m=k}^{m=n} \frac{1}{m}$ bei keinem Werte von k und n eine ganze Zahl sein kann.

Hier wird dieser Satz folgendermassen verallgemeinert, indem statt der speziellen arithmetischen Reihe

$$k, \quad k+1, \ldots \quad k+n$$

allgemeinere arithmetische Reihen betrachtet werden.

Es seien a, d, n beliebige positive ganze Zahlen, dann ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \cdots + \frac{1}{a+nd}$$

keine ganze Zahl.

Der Grundgedanke des Beweises besteht darin, dass ein Glied $a+kd$ angegeben wird, welches durch eine höhere Potenz einer Primzahl teilbar ist, als die übrigen Glieder.

Dies ergibt sich aus der Analyse der Primteiler der Ausdrücke:

$$\frac{(a+d)\,(a+2d)\ldots(a+nd)}{n!} \quad \text{und} \quad \binom{2n}{n}.$$

Paul Erdős.