EXTRAIT DE „STUDIA MATHEMATICA", T. VII. (1937).

Über die arithmetischen Mittelwerte der Lagrangeschen Interpolationspolynome

von

P. ERDÖS (Manchester) und G. GRÜNWALD (Budapest).

§ 1.

Das n-te Lagrangesche Interpolationspolynom der Funktion $f(x)$,

$$(1)\quad L_n[f(x)] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x-x_k^{(n)})} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(x),$$

$$(2)\qquad \omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k^{(n)}),$$

ist bekanntlich die einzige ganze rationale Funktion von höchstens $(n-1)$-tem Grade, die an den Stellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ mit der Funktion $f(x)$ übereinstimmt.

Bekanntlich[1]) existiert eine im Intervalle $-1 \leqslant x \leqslant +1$ stetige Funktion $f(x)$, so daß ihre Lagrangeschen Interpolationspolynome

$$(3)\qquad L_1[f(x)],\ L_2[f(x)], \ldots,\ L_n[f(x)], \ldots$$

in sämtlichen Punkten des Intervalls $-1 \leqslant x \leqslant +1$ divergieren (sogar unbeschränkt werden), wenn wir für $\omega_n(x)$ das Tschebycheffsche Polynom n-ter Ordnung wählen, d. h.

$$(4)\qquad \omega_n(x) = T_n(x) = \cos n \arccos x;$$

---

[1]) G. Grünwald, Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen, Ann. of Math. 37 (1936) p. 908—918; siehe auch J. Marcinkiewicz, Sur la divergence des polynomes d'interpolation, Acta Szeged 8 (1937) p. 131—135.

es sind also die Grundpunkte der Interpolation die Wurzeln von (4), d. h. die Zahlen

$$(5)\quad x_k^{(n)} = \cos (2k-1)\frac{\pi}{2n} = \cos \vartheta_k^{(n)} \quad (k=1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots).$$

Im Folgenden untersuchen wir die Divergenzmöglichkeiten der arithmetischen Mittelwerte der Folge (3), wenn die Grundpunkte der Interpolation die Zahlen (5) sind. Bisher war nur bekannt [2]) daß die arithmetischen Mittelwerte im Falle einer stetigen Funktion in einem Punkte divergieren können; nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn J. Marcinkiewicz kann die Divergenz auch *auf einer abzählbaren Menge* auftreten. In seiner oben zitierten Arbeit stellt Herr Marcinkiewicz die Frage, ob eine stetige Funktion mit fast überall divergenten arithmetischen Mittelwerten existieren kann. Diese Frage beantwortend beweisen wir den folgenden Satz: *Es gibt im Intervalle* $-1 \leqslant x \leqslant +1$ *eine stetige Funktion, so daß die arithmetischen Mittel der Lagrangeschen Interpolationspolynome der Funktion* $f(x)$

$$\frac{L_1[f(x)] + L_2[f(x)] + \ldots + L_n[f(x)]}{n} \quad (n=1,2,\ldots)$$

in sämtlichen Punkten des Intervalls $-1 \leqslant x \leqslant +1$ *divergieren (sogar unbeschränkt werden).*

Die Konstruktion dieser Funktion beruht im wesentlichen auf der Methode, welche in der oben zitierten Arbeit von G. Grünwald angewendet wurde.

§ 2.

Wir benötigen einige einfache, auf die Wurzeln der Tschebyscheffschen Polynome bezügliche Tatsachen.

Hilfssatz 1. *Die Tschebyscheffschen Polynome n-ter und 2n-ter Ordnung haben keine gemeinsamen Nullstellen.*

Beweis. Wäre

$$\cos (2k-1)\frac{\pi}{2n} = \cos (2l-1)\frac{\pi}{2n},$$

---

[2]) J. Marcinkiewicz, Sur l'interpolation (I), Stud. Math. 6 (1936) p. 1—17. Siehe auch P. Erdős — P. Turán, On Interpolation (I), Ann. of Math. 38 (1937) p. 142—155.

so hätte man

$$2(2k-1)=2l-1,$$

was unmöglich ist.

Hilfssatz 2. *Wenn* $(2k-1, m)=1$, $(2l-1, n)=1$ *und* $x_k^{(m)}=x_l^{(n)}$ *ist, dann ist* $k=l$, $m=n$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $\frac{2k-1}{m}=\frac{2l-1}{n}$; wegen $(2k-1, m)=1$ und $(2l-1, n)=1$ sind $\frac{2k-1}{m}$, $\frac{2l-1}{n}$ irreduzibel, d. h. $2k-1=2l-1$, $m=n$.

Hilfssatz 3.

$$|\cos\alpha_1\vartheta|+|\cos\alpha_2\vartheta|+\ldots+|\cos\alpha_k\vartheta|+|\cos 2\alpha_1\vartheta|+|\cos 2\alpha_2\vartheta| \\ +\ldots+|\cos 2\alpha_k\vartheta|>\frac{k}{2}.$$

Beweis. Es ist

$$|\cos x|+|\cos 2x|>\frac{1}{2},$$

denn im Falle

$$|\cos x|\leqslant\frac{1}{2}$$

ist

$$|\cos 2x|=|1-2\cos^2 x|\geqslant 1-2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

§ 3.

In der Untersuchung der Divergenzerscheinungen von Interpolationspolynomen spielen die Funktionen $l_k^{(n)}(x)$, die Grundfunktionen der Interpolation, bezw. die Summe der absoluten Beträge der Grundfunktionen $\sum_{k=1}^{n}|l_k^{(n)}(x)|$ eine wichtige Rolle. Für die Tschebyscheffschen Grundpunkte gilt

$$(6)\qquad \begin{aligned} l_k^{(n)}(x)&=(-1)^{k+1}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2n}}{n}\,\frac{\cos n\arccos x}{x-\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}} \\ &=(-1)^{k+1}\frac{\sin\vartheta_k^{(n)}}{n}\,\frac{\cos n\vartheta}{\cos\vartheta-\cos\vartheta_k^{(n)}}. \end{aligned}$$

Für unseren Zweck benötigen wir nicht die Summe der absoluten Beträge aller Grundfunktionen, sondern nur die Summe der absoluten Beträge geeignet gewählter Grundfunktionen. Zu dieser Auswahl benützen wir den folgenden zahlentheoretischen

Hilfssatz 4. *Wenn N genügend groß ist, ist die Anzahl der Zahlen n, für welche* 1) $N \leqslant n \leqslant \frac{3}{2} N$ *und* 2) *für alle* $m < \frac{N}{2}$

$$\sum_{\substack{n/m \leqq 2k+1 \leqq n \\ (2k+1,\, n)=1}} \frac{1}{2k+1} > \frac{1}{4} \log m - c_1$$

ausfällt, größer als $N/6$ (c_1 und später $c_2, c_3, \ldots$, sind positive, absolute Konstanten).

Wir beweisen zuerst, daß die Anzahl der Zahlen n', für welche $N \leqslant n' \leqslant \frac{3}{2} N$ und

$$f(n') = \sum_{\substack{p \neq 2 \\ p/n'}} \frac{1}{p} < \frac{1}{2} \text{ [3]}$$

ausfällt, größer als $N/6$ ist. Für genügend großes N ist nämlich

$$\sum_{N \leqq x \leqq \frac{3}{2} N} f(x) = \sum_{p \neq 2} \frac{1}{p} \left(\left[\frac{3N}{2p}\right] - \left[\frac{N}{p}\right] \right) < \sum_{p \neq 2} \frac{N}{2p^2} + \sum_{p < \frac{3}{2} N} \frac{1}{p}$$

$$< \frac{N}{2} \sum_{p \neq 2} \frac{1}{p^2} + c_2 \log \log N < \frac{N}{6} \text{ [4]},$$

und dies ist unsere Behauptung.

Es sei nun $N \leqslant n \leqslant \frac{3}{2} N$ und $f(n) < \frac{1}{2}$; dann ist

$$\sum_{\substack{n/m \leqq 2k+1 \leqq n \\ (2k+1,\, n)=1}} \frac{1}{2k+1} \geqq \sum_{n/m \leqq 2k+1 \leqq n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{\substack{p/n \\ p \neq 2}} \sum_{n/mp \leqq 2k+1 \leqq n/p} \frac{1}{2k+1},$$

---

[3] p bezeichnet Primzahlen.

[4] Es gilt nämlich $\sum_{p \neq 2} \frac{1}{p^2} < \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \ldots$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} < \frac{1}{3}$.

und wegen

$$\frac{1}{2}\log m - c_3 < \sum_{n/m \leqq 2k+1 \leqq n} \frac{1}{2k+1} < \frac{1}{2}\log m + c_3$$

folgt

$$\sum_{\substack{n/m \leqq 2k+1 \leqq n \\ (2k+1,\, n)=1}} \frac{1}{2k+1} > \frac{1}{2}\log m - c_3 - \sum_{\substack{p/n \\ p \neq 2}} \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\log m + c_3\right) \geqslant \frac{1}{4}\log m - c_1,$$

und dies ergibt den Hilfssatz.

§ 4.

Es sei x ein beliebiger, aber fester Punkt im Intervalle $-1 < x < +1$. Wir zerlegen das Intervall $-1 \leqslant x \leqslant +1$ in m gleiche Teile und rechnen jedem Teil den rechten Endpunkt hinzu, den linken aber nicht. Diese Intervalle seien $I_1, I_2, \ldots, I_m$. Es sei ferner x in $I_{\mu+1}$ enthalten (die I_k sind von links gerechnet). Wir betrachten diejenigen Werte von k, für welche $(2k+1, n) = 1$ und $x_k^{(n)} = \cos(2k-1)\,\pi/2n$ in $I_1, I_2, \ldots, I_{\mu-1}$ oder in I_μ enthalten ist. Nehmen wir an, daß es solche Werte von k gibt; dazu genügt es, daß $x_n^{(n)}$ in I_1 enthalten sei, x aber nicht, also daß

$$1 + x_n^{(n)} \leqslant \frac{2}{m} < 1 + x;$$

wegen $1 + x_n^{(n)} = \cos\vartheta_n^{(n)} - \cos\pi \leqslant \pi - \vartheta_n^{(n)} = \pi/2n < 2/n$ (wenn nämlich $\pi \geqslant \alpha > \beta \geqslant 0$, dann ist $\cos\beta - \cos\alpha < \alpha - \beta$) genügt es also, wenn m die Ungleichung

$$\frac{2}{1+x} < m \leqslant n \tag{7}$$

erfüllt, was wir voraussetzen werden.

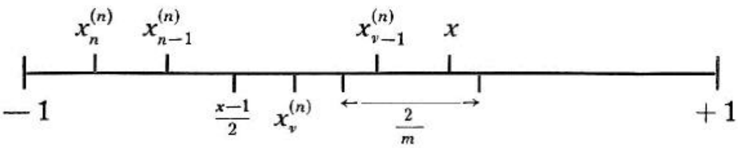
Unser wichtigstes Hilfsmittel ist

Hilfssatz 5. *Es sei n eine natürliche Zahl, für welche die Abschätzung des Hilfssatzes 4 gilt. Wenn x im Intervalle $I_{\mu+1}$ liegt, dann gilt für genügend große n und m die Ungleichung*

$$\sum_{\substack{(2k+1,\, n)=1 \\ \frac{x-1}{2} \leqq x_k^{(n)} \leqq x_\nu^{(n)}}} |l_k^{(n)}(x)| > c_1(x)\,|\cos n\vartheta|\log m - c_2(x), \tag{8}$$

wo $c_1(x)$, $c_2(x)$ *und später* $c_3(x), \ldots$ *nur von* x *abhängige positive Zahlen sind (d. h. sie sind für festes* x *fest) und* ν *der kleinste Index ist, für welchen* $x_\nu^{(n)}$ *in einem der Intervalle* $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ *liegt.*

Beweis. Betrachten wir nur solche unsere Bedingungen erfüllende k-Werte, für welche die $x_k^{(n)}$ von der Mitte des Intervalls $(-1, x)$ rechts liegen. Die Verhältnisse zeigt die Figur:



Unter diesen Bedingungen ist

$$\sin \frac{2k-1}{2n} \pi > \min \left(\sqrt{1 - \left(\tfrac{x-1}{2}\right)^2}, \sqrt{1-x^2} \right),$$

also gilt nach (6)

$$(9) \qquad | l_k^{(n)}(x) | > \frac{|\cos n\vartheta|}{n} \; \frac{\min \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}, \sqrt{1-x^2} \right)}{x - \cos (2k-1) \frac{\pi}{2n}} .$$

Nach der Definition von ν ist

$$x - x_k^{(n)} = (x - x_\nu^{(n)}) + (x_\nu^{(n)} - x_k^{(n)}) < \frac{4}{m} + \vartheta_k^{(n)} - \vartheta_\nu^{(n)} = \frac{4}{m} + \frac{k-\nu}{n} \pi,$$

also folgt aus (9)

$$(10) \qquad | l_k^{(n)}(x) | > c_3(x) \frac{|\cos n\vartheta|}{2k - (2\nu+1) + \frac{n}{m}} .$$

$T_n(x)$ hat in einem von n unabhängigen Intervalle mehr Wurzeln, als An, wo $A > 0$ nur von der Länge des Intervalls abhängt und $A < 1$, wenn die Länge des Intervalls kleiner als 2 ist. Also hat $T_n(x)$ zwischen dem linksseitigen Endpunkt von $I_{\mu+1}$ und dem Punkt $\frac{x-1}{2}$ $c_4(x)\, n$ Wurzeln, wenn n genügend groß ist ($c_4(x) < 1$). Daher folgt aus dem Hilfssatz 4 und (10), daß

$$\sum_{\substack{(2k+1,\, n)=1 \\ \frac{x-1}{2} \leqq x_k^{(n)} \leqq x_\nu^{(n)}}} | l_k^{(n)}(x) | \geqq c_3(x) |\cos n\vartheta| \sum_{\substack{(2k+1,\, n)=1 \\ n/m \leqq 2k+1 \leqq c_4(x)\, n}} \frac{1}{2k+1}$$

$$> c_3(x) |\cos n\vartheta| \sum_{\substack{(2k+1,\, n)=1 \\ n/m \leqq 2k+1 \leqq n}} \frac{1}{2k+1} - c_3(x) |\cos n\vartheta| \sum_{\substack{(2k+1,\, n)=1 \\ c_4(x)\, n \leqq 2k+1 \leqq n}} \frac{1}{2k+1}$$

$$> c_3(x)\,|\cos n\vartheta|\sum_{\substack{(2k+1,\,n)=1\\ n/m\leqq 2k+1\leqq n}}\frac{1}{2k+1}-c_3(x)\sum_{c_4(x)n\leqq 2k+1\leqq n}\frac{1}{2k+1}$$

$$> c_3(x)\,|\cos n\vartheta|\sum_{\substack{(2k+1,\,n)=1\\ n/m\leqq 2k+1\leqq n}}\frac{1}{2k+1}-c_5(x)$$

$$> c_3(x)\,|\cos n\vartheta|\,\left(\frac{1}{4}\log m-c_1\right)-c_5(x)>c_1(x)\,|\cos n\vartheta|\log m-c_2(x).$$

Nach dem Hilfssatz 4 ist die Anzahl der Zahlen n mit $N\leqslant n\leqslant 3N/2$, für welche die Abschätzung (8) gilt, größer als $N/6$.

§ 5.

Es sei

$$\sigma_n=\max_{-1\leq x\leq +1}\sum_{k=1}^{n}|l_k^{(n)}(x)|=\max_{-1\leq x\leq +1}\lambda_n(x)$$

und $\varrho(n)$ der größte unter den Werten $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$. Es ist klar, daß

$$\varrho(1)\leqslant\varrho(2)\leqslant\ldots\leqslant\varrho(n)\,^{5)};$$

ferner ist, wegen $\lambda_n(x_k^{(n)})=1$, $\varrho(n)\geqslant\sigma_n\geqslant 1$. Für eine beliebige Funktion $-1\leqslant f(x)\leqslant +1$ gilt, wenn $-1\leqslant x\leqslant +1$ und $q\leqslant n$, in sämtlichen Punkten des Intervalls $-1\leqslant x\leqslant +1$ die Ungleichung

$$\text{(11)}\qquad |L_q[f(x)]|\leqslant\sum_{k=1}^{q}|l_k^{(n)}(x)|=\lambda_q(x)\leqslant\sigma_q\leqslant\varrho(n).$$

Es sei n_i, $i=1,2,\ldots$ eine unendliche Folge natürlicher Zahlen. Von nun an wird jedes n aus dieser Folge gewählt. Teilen wir das Intervall $-1\leqslant x\leqslant +1$ in m_i gleiche Teile. Es seien die Zahlen m_i, $i=1,2,\ldots$ und

$$\text{(12)}\qquad n_{m_i}\leqslant n_{m_i+1}\leqslant n_{m_i+2}\leqslant\ldots\leqslant n_{2m_i}$$

so gewählt, daß

$$\text{(13)}\qquad n_{m_i+s}\geqslant 4\,n_{m_i+(s-1)}\quad(s=1,2,\ldots,m_i;\ i=1,2,\ldots),$$

[5]) Es ist sehr wahrscheinlich, daß $\sigma_n=\varrho(n)$ ist.

$$(14)\quad \begin{aligned} &n_{m_1}+n_{m_1+1}+\ldots+n_{2m_1}+n_{m_2}+n_{m_2+1}+\ldots+n_{2m_2}+\ldots+n_{m_{i-1}} \\ &\quad +n_{m_{i-1}+1}+\ldots+n_{2m_{i-1}}\leqq n_{m_i} \quad (i=1,2,\ldots), \end{aligned}$$

$$(15)\qquad \log m_i > i\,2^i\,\varrho(3\,n_{2m_{i-1}}) = i\,2^i\,\tau_i \quad (i=2,3,\ldots),$$

$$(16)\qquad n_{m_i} > \varrho(1)+\varrho(2)+\ldots+\varrho(g_{i-1}) \quad (i=2,3,\ldots),$$

wo die ganzen Zahlen $g_1, g_2, \ldots$ später angegeben werden. Es seien die m_i Teilintervalle des Intervalles $-1\leqq x\leqq +1$ $I_1^{(i)}$, $I_2^{(i)}, \ldots, I_{m_i}^{(i)}$. Nach den Hilfssätzen 1 und 2 können wir das Polynom $\varphi_i(x)$ vom Grade g_i so bestimmen, daß für

$$n_{m_i}\leqq n\leqq \frac{3}{2}\,n_{m_i},\quad (2k+1,\,n)=1,\quad k\leqq n-1$$
$$\varphi_i(x_k^{(n)})=\varphi_i(x_k^{(2n)})=(-1)^{k+1}$$

ist, wenn nur die Wurzeln

$$(17)\qquad x_k^{(n)},\quad x_k^{(2n)}$$

der Tschebyscheffschen Polynome $T_{n_{m_i}+q}(x)$, $T_{2(n_{m_i}+q)}(x)$ für $q=1,2,\ldots,[n_{m_i}/2]$ im Intervalle $I_1^{(i)}$ liegen; für die weiteren im Intervalle $(-1,\,+1)$ liegenden Nullstellen x_k der Tschebyscheffschen Polynome $T_1(x)$, $T_2(x), \ldots, T_{3n_{m_i}}(x)$ sei $\varphi_i(x_k)=0$; es sei ferner für

$$n_{m_i+1}\leqq n\leqq \frac{3}{2}\,n_{m_i+1},\quad (2k+1,\,n)=1,\quad k\leqq n-1$$
$$\varphi_i(x_k^{(n)})=\varphi_i(x_k^{(2n)})=(-1)^{k+1},$$

wenn die Wurzeln

$$(18)\qquad x_k^{(n)},\quad x_k^{(2n)}$$

der Tschebyscheffschen Polynome $T_{n_{m_i+1}+q}(x)$, $T_{2(n_{m_i+1}+q)}(x)$ $q=1,2,\ldots,[n_{m_i+1}/2]$ in den Intervallen $I_1^{(i)}$, $I_2^{(i)}$ liegen; für die weiteren im Intervalle $-1\leqq x\leqq +1$ liegenden und bisher (in (17)) nicht aufgezählten Nullstellen x_k der Tschebyscheffschen Polynome

$T_1(x),\ T_2(x), \ldots,\ T_{3n_{m_i+1}}(x)$ sei $\varphi_i(x_k) = 0$; im allgemeinen sei für

$$n_{m_i+s} \leqslant n \leqslant \frac{3}{2}\, n_{m_i+s}, \quad (2k+1, n) = 1, \quad k \leqslant n-1,$$

$$\varphi_i(x_k^{(n)}) = \varphi_i(x_k^{(2n)}) = (-1)^{k+1},$$

wenn die Wurzeln

(W) $$x_k^{(n)},\ x_k^{(2n)}\ ^{6)}$$

der Tschebyscheffschen Polynome $T_{n_{m_i+s}+q}(x),\ T_{2(n_{m_i+s}+q)}(x), (q=1, 2, \ldots, [n_{m_i+s}/2])$ in den Intervallen $I_1^{(i)},\ I_2^{(i)}, \ldots,\ I_{s+1}^{(i)}$ liegen; für die weiteren im Intervalle $(-1, +1)$ liegenden und bisher (in (17), (18) u. s. w.) nicht aufgezählten Nullstellen x_k der Tschebyscheffschen Polynome $T_1(x),\ T_2(x), \ldots,\ T_{3n_{m_i+s}}$ sei $\varphi^i(x_k) = 0$. Man kann voraussetzen, daß

(19) $$|\varphi_i(x)| \leqslant 2\ ^{7)}.$$

Wir bilden nun die Funktion

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{2^i\, \tau_i}.$$

$\varphi(x)$ ist im Intervalle $-1 \leqslant x \leqslant +1$ stetig und

$$|\varphi(x)| \leqslant 2.$$

§ 6.

Wir beweisen, daß für einen beliebigen Punkt x des Intervalls $-1 < x < +1$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{L_1[\varphi(x)] + L_2[\varphi(x)] + \ldots + L_n[\varphi(x)]}{n} \right| = +\infty$$

ist.

---

[6]) Nach (13) sind die Wurzeln (17), (18), ..., (W) ... verschieden!

[7]) Es gilt nämlich der mit Hilfe des Weierstraßschen Satzes leicht beweisbare Satz: Ist $f(x)$ eine stetige Funktion im Intervalle $-1 \leqslant x \leqslant +1$ und sind $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ gegebene Zahlen, die im Intervalle $-1 \leqslant x \leqslant +1$ liegen, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $P(x)$ mit

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

und

$$P(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Es sei nämlich x ein beliebiger, aber fester Punkt des Intervalls $-1 < x < +1$. Wir zerlegen das Intervall $(-1, +1)$ in m_r gleiche Teile. Es liege x im Intervall $I_{s+1}^{(r)}$. Bilden wir die arithmetischen Mittelwerte $3n_{m_r+s}$-ter Ordnung der Interpolationspolynome der Funktion $\varphi(x)$

$$\Sigma = \frac{L_1[\varphi(x)] + L_2[\varphi(x)] + \ldots + L_{3n_{m_r+s}}[\varphi(x)]}{3n_{m_r+s}}.$$

Es sei

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varphi_i(x)}{2^i \tau_i}, \tag{20}$$

$$f_2(x) = \frac{\varphi_r(x)}{2^r \tau}, \tag{21}$$

$$f_3(x) = \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{2^i \tau_i}. \tag{22}$$

Dann ist (wenn wir zur Abkürzung $t = 3n_{m_r+s}$ setzen)

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{L_1[f_1(x)] + \ldots + L_t[f_1(x)]}{t} \\ &+ \frac{L_1[f_2(x)] + \ldots + L_t[f_2(x)]}{t} + \frac{L_1[f_3(x)] + \ldots + L_t[f_3(x)]}{t} \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \end{aligned} \tag{23}$$

$f_1(x)$ ist ein Polynom vom Grade g_{r-1}, d. h.

$$L_n[f_1(x)] = f_1(x),$$

wenn $n \geqslant g_{r-1}$; also ist

$$|\Sigma_1| = \left| \frac{t - g_{r-1}}{t} f_1(x) + \frac{L_1[f_1(x)] + \ldots + L_{g_{r-1}}[f_1(x)]}{t} \right|$$
$$< |f_1(x)| + \frac{|L_1[f_1(x)]| + \ldots + |L_{g_{r-1}}[f_1(x)]|}{t};$$

wegen $|f_1(x)| \leqslant 2$ folgt aus (11)

$$|\Sigma_1| < 2 + \frac{\varrho(1)+\varrho(2)+\ldots+\varrho(g_{r-1})}{t}$$

und schließlich aus (16) und (12)

$$(24) \qquad |\Sigma_1| < 2 + \frac{n_{m_r}}{3\,n_{m_r+s}} < 3.$$

Wegen (11) ist

$$|\Sigma_3| \leqslant \frac{|L_1[f_3(x)]|+\ldots+|L_t[f_3(x)]|}{t}$$
$$\leqslant \frac{\varrho(1)+\varrho(2)+\ldots+\varrho(t)}{t} \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^i\,\tau_i},$$

und nach (15)

$$|\Sigma_3| \leqslant \frac{\varrho(1)+\varrho(2)+\ldots+\varrho(t)}{t} \sum_{=r+1}^{\infty} \frac{1}{2_i\,\varrho(3\,n_{2m_{i-1}})}$$
$$\leqslant \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{3\,n_{m_r+s}\,\varrho(3\,n_{m_r+s})}{3\,n_{m_r+s}\,2^i\,\varrho(3\,n_{2m_r})},$$

also wegen (12)

$$(25) \qquad |\Sigma_3| < \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < 1.$$

Es seien nun $n_1,\ 2n_1,\ n_2,\ 2n_2,\ldots,n_k,\ 2n_k$ die Zahlen zwischen n_{m_r+s} und $3\,n_{m_r+s}$, für welche der Hilfssatz 4 gilt. Nach Hilfssatz 4 ist

$$(26) \qquad k > \frac{1}{6}\,3\,n_{m_r+s} = \frac{1}{2}\,n_{m_r+s}.$$

Nach Hilfssatz 5 gilt

$$(27) \qquad \begin{aligned} |L_{n_i}[\varphi_r(x)]| &> c_6(x)\,|\cos n_i\vartheta|\log m_r - c_7(x),\\ |L_{2n_i}[\varphi_r(x)]| &> c_6(x)\,|\cos 2\,n_i\vartheta|\log m_r - c_7(x). \end{aligned}$$

Nach der Konstruktion des Polynoms $\varphi_r(x)$ haben wir

$$\sum_{n=\frac{1}{3}t}^{t} |L_n[f_2(x)]| = \Big|\sum_{n=\frac{1}{3}t}^{t} L_n[f_2(x)]\Big|,$$

also

$$
\begin{aligned}
|\Sigma_2| &\geqq \left| \frac{L_{\frac{1}{3}t}[f_2(x)] + L_{\frac{1}{3}t+1}[f_2(x)] + \ldots + L_t[f_2(x)]}{t} \right| \\
\text{(28)} \qquad &- \left| \frac{L_1[f_2(x)] + \ldots + L_{\frac{1}{3}t-1}[f_2(x)]}{t} \right| \\
&\geqq \frac{|L_{\frac{1}{3}t}[f_2(x)]| + \ldots + |L_t[f_2(x)]|}{t} - \frac{|L_1[f_2(x)]| + \ldots + |L_{\frac{1}{3}t-1}[f_2(x)]|}{t}.
\end{aligned}
$$

Die Anzahl der Nullstellen x_k der Tschebyscheffschen Polynome, die bei der Definition der Polynome $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_r(x)$ auftraten und für welche $\varphi_i(x_k) \neq 0$ für ein $i \leqq r$, ist kleiner als

$$
\text{(29)} \quad \begin{aligned} &n_{m_1} + n_{m_1+1} + \ldots + n_{2m_1} + n_{m_2} + n_{m_2+1} + \ldots + n_{2m_2} + \ldots + n_{m_{r-1}} \\ &\qquad + n_{m_{r-1}+1} + \ldots + n_{2m_{r-1}}, \end{aligned}
$$

also wegen

$$
|l_k^{(n)}(x)| < \sqrt{2}\ {}^{8)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)
$$

ergibt sich aus (29) und (14)

$$
\begin{aligned}
&\frac{|L_1[f_2(x)]| + \ldots + |L_{t-1}[f_2(x)]|}{t} \\
&\leqq \sqrt{2}\, \frac{n_{m_1} + \ldots + n_{2m_1} + n_{m_2} + \ldots + n_{2m_2} + \ldots + n_{m_{r-1}} + \ldots + n_{2m_{r-1}}}{t} \\
&\leqq \sqrt{2}\, \frac{n_{m_r}}{3 n_{m_r+s}} < 1,
\end{aligned}
$$

und endlich nach (28)

$$
\text{(30)} \qquad |\Sigma_2| \geqq \frac{|L_{t/3}[f_2(x)]| + \ldots + |L_t[f_2(x)]|}{t} - 1.
$$

Zum Schluß betrachten wir die Summe

$$
\begin{aligned}
&|L_{t/3}[f_2(x)]| + \ldots + |L_t[f_2(x)]| \\
&= \frac{1}{2^r \tau_r} \{ |L_{t/3}[\varphi_r(x)]| + \ldots + |L_t[\varphi_r(x)]| \} = S.
\end{aligned}
$$

Nach (27) ist

[8]) L. Fejér, Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, Math. Ann. 106 (1932) p. 1—55; Formel 28.

$$S \geqslant \frac{c_6(x)\log m_r}{2^r \tau_r}\,(|\cos n_1\vartheta| + |\cos 2n_1\vartheta|$$
$$+\ldots+|\cos n_k\vartheta| + |\cos 2n_k\vartheta|) - \frac{2k\,c_7(x)}{2^r\tau_r},$$

also nach (30) und Hilfssatz 3

$$|\Sigma_2| \geqslant \frac{1}{t}\,\frac{\frac{k}{2}\,c_6(x)\log m_r}{2^r\tau_r} - \frac{2k\,c_7(x)}{t\,2^r\tau_r} - 1$$
$$\geqslant \frac{c_6(x)\,k\log m_r}{t\,\tau_r\,2^{r+1}} - c_7(x) - 1$$

und nach (26)

$$|\Sigma_2| \geqslant \frac{c_6(x)\log m_r\,\frac{1}{2}\,n_{m_r+s}}{3\,n_{m_r+s}\,\tau_r\,2^{r+1}} - c_7(x) - 1$$
$$\geqslant \frac{c_6(x)}{2^4}\,\frac{\log m_r}{2^r\tau_r} - c_7(x) - 1.$$

Wegen (15) ist $\log m_r > r\,2^r\tau_r$, also

$$|\Sigma_2| \geqslant \frac{c_6(x)}{2^4}\,r - c_7(x) - 1. \tag{31}$$

Nach (23) ist

$$|\Sigma| \geqslant |\Sigma_2| - |\Sigma_1| - |\Sigma_3|,$$

was mit (24), (25), (31)

$$|\Sigma| \geqslant c_8(x)\,r - c_7(x) - 1 - 3 - 1 = c_8(x)\,r - c_9(x)$$

ergibt, daher ist

$$|\Sigma| \to +\infty, \text{ für } r \to \infty, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Nach unseren Betrachtungen kann man leicht eine stetige Funktion $\psi(x)$ konstruieren, deren arithmetische Mittelwerte der Lagrangeschen Interpolationspolynome in den Punkten -1 und $+1$ divergieren und in sämtlichen Punkten des Intervalls $-1 < x < +1$ konvergieren. Die Summe der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ist eine Funktion $f(x)$, für welche die Folge

$$\left\{ \frac{L_1[f(x)] + L_2[f(x)] + \ldots + L_n[f(x)]}{n} \right\}$$

überall divergiert.

Zuletzt bemerken wir, daß man mit Hilfe unserer Methode leicht stetige Funktionen konstruieren kann, für welche die arithmetischen Mittelwerte von der Ordnung m (m beliebig ganz) der Lagrangeschen Interpolationspolynome überall divergieren, wenn die Grundpunkte der Interpolation die Wurzeln der Tschebyscheffschen Polynome sind.

(Reçu par la Rédaction le 21. 6. 1937).