SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS FRONTIÈRES
DES FONCTIONS HOLOMORPHES DÉFINIES
PAR CERTAINS PRODUITS DANS LE CERCLE-UNITÉ

Par MM. F. BAGEMIHL, P. ERDÖS et W. SEIDEL.

1. C'est un fait connu qu'une fonction d'une variable complexe z, holomorphe dans le cercle-unité, ne peut pas tendre uniformément vers l'infini, lorsque z s'approche de la circonférence. Il est donc intéressant de montrer qu'il existe des fonctions holomorphes dans le cercle-unité qui tendent uniformément vers l'infini sur une suite de courbes de Jordan dont chacune contient la précédente à son intérieur. Un exemple de cette nature a été donné par Fatou ([3], p. 262) pour la fonction de Kœnigs $K(z)$ définie de la manière suivante : soit s un nombre réel, $0 < s < 1$, et soient

$$R_1(z) = \frac{z(z-s)}{1-sz}, \qquad R_n(z) = R_1(R_{n-1}(z)) \qquad (n \geqq 2).$$

La suite des fonctions $\{R_n(z)\}$ tend alors uniformément vers zéro dans chaque cercle $|z| \leqq \rho < 1$ et

$$K(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{R_n(z)}{s^n}.$$

On ne sait pas si la suite de courbes de Jordan, dans le cas de $K(z)$, peut être remplacée par une suite de circonférences concentriques. Lusin et Priwaloff ([5], p. 147) ont cependant construit un exemple, dans lequel ces courbes de Jordan sont des circonférences concentriques. Une simplification considérable de cet exemple a été récemment obtenue par Davydov ([7], p. 167).

Fatou a découvert de plus ces propriétés remarquables de la fonction de

Kœnigs : autour de chaque zéro z_n de $K(z)$, il existe une courbe de Jordan C_n dans $|z|<1$, telle que toutes les C_n soient extérieures l'une à l'autre et $|K(z)|\to\infty$ lorsque $|z|\to 1$ et reste extérieur aux courbes C_n([3], p. 262). On a encore ([3], p. 265)

$$\lim_{r\to 1}|K(re^{i\theta})|=\infty$$

pour presque tous les θ dans l'intervalle $0\leq\theta<2\pi$. Des exemples de fonctions jouissant de telles propriétés ont été donnés aussi par Lusin et Priwaloff ([5], p. 152 et 185).

Collingwood et Cartwright ont récemment noté ([2], p. 94) que $|K(z)|\to\infty$ sur une spirale dans $|z|<1$ s'approchant de $|z|=1$ asymptotiquement. Des exemples d'un tel comportement ont été antérieurement discutés par Valiron [8]. Valiron a démontré en outre ([1], p. 64) que $|K(z)|+|K'(z)|\to\infty$ lorsque z s'approche de la circonférence $|z|=1$ de manière quelconque.

Dans l'article présent, nous démontrons par des méthodes directes et élémentaires que la fonction

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right\}$$

pour des entiers positifs $n_j\to\infty$ convenables, jouit de toutes les propriétés ci-dessus mentionnées, certaines sous une forme plus simple ou plus précise, et aussi d'autres. Par des méthodes analogues, nous obtenons aussi des exemples, dont quelques-uns sont déjà connus et d'autres nouveaux, concernant les limites radiales des fonctions holomorphes.

2. Soit $n_k(k=1, 2, \ldots)$, une suite croissante d'entiers positifs tels que

$$\text{(A)}\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{n_{k-1}}=\infty,\qquad n_1>1.$$

Nous considérons le produit infini

$$\text{(1)}\qquad f(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right\}$$

qui converge absolument et uniformément dans chaque cercle $|z|\leq\rho<1$ et définit par conséquent une fonction holomorphe dans le cercle-unité $|z|<1$ qui a n_j zéros simples sur la circonférence $|z|=1-\frac{1}{n_j}$ pour $j=1, 2, \ldots$. Autour de chaque zéro de $f(z)$ sur la circonférence $|z|=1-\frac{1}{n_j}$ $(j=1, 2, \ldots)$, nous décrivons une circonférence de rayon égal à $\frac{1}{j^2 n_j}$; nous désignerons chacune de ces n_j circonférences par γ_j, et γ_j avec son intérieur par Γ_j.

Puisqu'au plus un nombre fini de tous les Γ_j $(j=1, 2, \ldots)$, peuvent empiéter les uns sur les autres, il existe un entier $j_0 > 0$ tel que tous les cercles Γ_j, pour $j \geqq j_0$, soient disjoints. Ainsi, si l'on enlève les Γ_j, $j \geqq j_0$ du cercle $|z| < 1$, l'ensemble qui reste est un domaine Δ. Nous démontrons d'abord le

THÉORÈME 1. — *Lorsque z tend vers la circonférence $|z|=1$ en restant dans le domaine Δ,*

$$\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = \infty$$

uniformément en z.

Pour le prouver, nous allons démontrer que si z_0 se trouve dans Δ suffisamment près de la circonférence $|z|=1$ et si k est l'entier pour lequel

$$1 - \frac{1}{n_k} \leqq |z_0| < 1 - \frac{1}{n_{k+1}},$$

on a l'inégalité

$$(2) \qquad |f(z_0)| > \frac{c_1}{k^2(k+1)^2}\left(\frac{3}{4}e - 1\right)^{k-1},$$

où c_1, aussi bien que $c_2, \ldots, c_{12}$ dans la suite, désigne une constante positive universelle. Séparons le produit (1) en quatre produits composés de facteurs qui correspondent à $1 \leqq j \leqq k-1$, $j=k$, $j=k+1$, $j \geqq k+2$:

$$(3) \qquad f(z) = \prod_{\nu=1}^{4} P_\nu(z),$$

et déterminons la borne inférieure de chacun des produits $P_\nu(z)$ au point $z=z_0$.

Tout d'abord, nous avons

$$(4) \qquad |P_1(z_0)| \geqq \prod_{j=1}^{k-1}\left\{\left(\frac{|z_0|}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j} - 1\right\} \geqq \prod_{j=1}^{k-1}\left\{\left(\frac{1-\frac{1}{n_k}}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j} - 1\right\}.$$

Pour k suffisamment grand, on a de plus

$$\left(\frac{1-\frac{1}{n_k}}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j} \geqq e\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{n_j} \geqq e\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{n_{k-1}} \geqq e^{-\frac{2n_{k-1}}{n_k}+1} \geqq \frac{3}{4}e,$$

où la dernière inégalité résulte de la condition (A). Ainsi, en tenant compte de (4), on obtient

$$(5) \qquad |P_1(z_0)| \geqq \left(\frac{3}{4}e - 1\right)^{k-1}.$$

Pour le second produit, on a

$$|P_2(z_0)| = \left|\left(\frac{z_0}{1-\frac{1}{n_k}}\right)^{n_k} - 1\right|,$$

et, puisque z_0 se trouve dans Δ, il reste à l'extérieur de tous les cercles γ_k. D'après le principe du minimum, $|P_2(z_0)|$ doit être plus grand que la valeur que $|P_2(z)|$ prend en quelque point,

$$\zeta=\left(1-\frac{1}{n_k}\right)e^{\frac{2\pi i l}{n_k}}+\frac{1}{k^2 n_k}e^{i\alpha},$$

de l'une des circonférences γ_k, où l est un des nombres $0, 1, \ldots, n_k-1$, et α est un nombre réel. Ainsi, on a

$$(6)\qquad |P_2(z_0)|>|P_2(\zeta)|=\left|\left(e^{\frac{2\pi i l}{n_k}}+\frac{1}{k^2(n_k-1)}e^{i\alpha}\right)^{n_k}-1\right|\geqq\frac{c_2}{k^2}.$$

Par un raisonnement tout à fait analogue, on obtient l'inégalité

$$(7)\qquad |P_3(z_0)|>\frac{c_3}{(k+1)^2}.$$

Enfin, pour estimer $|P_4(z_0)|$, nous notons que

$$(8)\qquad \left(\frac{1-\frac{1}{n_{k+1}}}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\leqq 4\left(1-\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_j}\leqq 4e^{-\frac{n_j}{n_{k+1}}},$$

pour $j\geqq k+2$, puisque

$$(9)\qquad \left(1-\frac{1}{n_j}\right)^{-n_j}\leqq 4.$$

Or, si k est choisi assez grand pour que, pour tous les $\nu\geqq k$,

$$\frac{n_{\nu+2}}{n_{\nu+1}}>2,$$

ce qui est possible à cause de la condition (A), on trouve pour $j\geqq k+2$,

$$\frac{n_j}{n_{k+1}}>2^{j-k-1}$$

et par conséquent,

$$(10)\qquad |P_4(z_0)|\geqq\prod_{j=k+2}^{\infty}(1-4e^{-2^{j-k-1}})=\prod_{\mu=2}^{\infty}(1-4e^{-2^{\mu-1}})=c_4>0.$$

En tenant compte de (3), (5), (6), (7) et (10), on obtient l'inégalité (2), ce qui achève la démonstration.

On voit sans peine que la mesure superficielle du complément de Δ par rapport à $|z|<1$, peut être rendue arbitrairement petite. Il est clair, cependant, que l'ensemble sur lequel une fonction holomorphe dans $|z|<1$ tend vers l'infini uniformément lorsque $|z|\to 1$ ne peut pas être de mesure superficielle π.

Nous remarquons que $\frac{1}{f(z)}$ est méromorphe dans $|z|<1$ et tend uniformément vers zéro, lorsque $|z| \to 1$, $z \in \Delta$. Une fonction de cette nature a été construite par Lusin et Priwaloff ([5], p. 175) pour un Δ plus compliqué.

3. Puisque le domaine Δ possède une structure particulièrement simple, quelques autres théorèmes résultent immédiatement du théorème 1.

Théorème 2. — *La fonction $f(z)$ définie par* (1), *satisfait à la relation*

$$\lim_{r \to 1} |f(re^{i\theta})| = \infty \tag{11}$$

pour toutes les valeurs de θ dans l'intervalle $0 \leq \theta < 2\pi$, sauf un ensemble de valeurs de θ de mesure nulle.

En effet, on voit tout de suite que, pour presque tout θ, le rayon $re^{i\theta}$ du cercle-unité $|z| < 1$ jouit de la propriété suivante : il existe un nombre $0 < \rho(\theta) < 1$ tel que pour $r > \rho(\theta)$ la partie correspondante du rayon $re^{i\theta}$ est intérieure à Δ.

Il résulte facilement de la définition de Δ que l'ensemble des valeurs de θ qui satisfont à (11) est de première catégorie; cela est, en effet, une conséquence nécessaire du fait que cet ensemble est aussi de mesure 2π (*cf.* [5], p. 189).

Théorème 3. — *Il existe une suite de circonférences $|z| = \rho_k$, $0 < \rho_k < 1$, $\lim_{k \to \infty} \rho_k = 1$, telles que, en posant $m_k = \min_{|z| = \rho_k} |f(z)|$, on ait $\lim_{k \to \infty} m_k = \infty$.*

En faisant

$$\rho_k = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_{k+1}}\right), \tag{12}$$

on trouve, par suite de la condition (A), que

$$1 - \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k^2 n_k} < \rho_k < 1 - \frac{1}{n_{k+1}} - \frac{1}{(k+1)^2 n_{k+1}}$$

pour toutes les valeurs de k suffisamment grandes. Ainsi, pour ces valeurs de k, chaque circonférence $|z| = \rho_k$, à mi-chemin entre les cercles concentriques $|z| = 1 - \frac{1}{n_k}$ et $|z| = 1 - \frac{1}{n_{k+1}}$, est tout entière intérieure au domaine Δ.

Théorème 4. — *Il existe une famille de $2^{\aleph_0}$ spirales S_t, $0 < t < 1$, dans $|z| < 1$, chacune s'approchant de $|z| = 1$ asymptotiquement, qui sont disjointes sauf à leur point initial commun $z = 0$, telles que pour chaque t,*

$$\lim_{\substack{|z| \to 1 \\ z \in S_t}} |f(z)| = \infty,$$

et que chacun des deux sous-domaines de $|z| < 1$ déterminés par deux spirales quelconques de la famille, contient une infinité de zéros de $f(z)$.

D'après le théorème 3 et la continuité, il résulte qu'à chaque $k = 1, 2, \ldots$

correspond un $\delta_k > 0$, $\delta_1 < \rho_1$ tel que, pour $\rho_k - \delta_k < |z| < \rho_k + \delta_k$, $|f(z)| > \frac{m_k}{2}$. Si nous posons

$$g_n(\theta) = \inf_{1-\frac{1}{n} \leq r < 1} |f(re^{i\theta})|,$$

il vient, d'après le théorème 2,

$$\lim_{n \to \infty} g_n(\theta) = \infty$$

pour presque tout θ dans l'intervalle $0 \leq \theta < 2\pi$. De là, en appliquant le théorème d'Egoroff à la suite $\{g_n(\theta)\}$, pour un ε donné, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, il existe un sous-ensemble parfait E de $0 \leq \theta < 2\pi$ de mesure $> 2\pi - \varepsilon$ pour lequel

$$\lim_{r \to 1} |f(re^{i\theta})| = \infty, \qquad \theta \in E,$$

uniformément en θ.

Soient E_1 et E_2 les deux sous-ensembles de E dans $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, respectivement. Alors, il existe des ensembles $A_1 \subset E_1$ et $A_2 \subset E_2$ semblables (au sens des ensembles ordonnés) à l'intervalle-unité $0 < t < 1$ ([4], p. 76). Il s'ensuit qu'ils peuvent s'écrire $A_1 = \{\theta_t\}_{0<t<1}$, $A_2 = \{\varphi_t\}_{0<t<1}$, de sorte que, si $0 < t_1 < t_2 < 1$, alors $\theta_{t_1} < \theta_{t_2}$ et $\varphi_{t_1} < \varphi_{t_2}$. De plus, pour chaque $k = 1, 2, \ldots$, en désignant par I_k l'intervalle $\rho_k - \delta_k < r < \rho_k + \delta_k$, on peut écrire

$$I_k = \{\sigma_t^{(k)}\}_{0<t<1},$$

de sorte que, si $0 < t_1 < t_2 < 1$, alors $\sigma_{t_1}^{(k)} > \sigma_{t_2}^{(k)}$. Nous définissons maintenant S_t comme se composant des segments et des arcs circulaires suivants :

$$\begin{array}{ll}
\rho e^{i\theta_t}, & 0 \leq \rho \leq \sigma_t^{(1)}, \quad \sigma_t^{(2k)} \leq \rho \leq \sigma_t^{(2k+1)}; \\
\tau e^{i\varphi_t}, & \sigma_t^{(2k-1)} \leq \tau \leq \sigma_t^{(2k)}; \\
\sigma_t^{(2k-1)} e^{i\psi}, & \theta_t + 2(k-1)\pi \leq \psi \leq \varphi_t + 2(k-1)\pi; \\
\sigma_t^{(2k)} e^{i\chi}, & \varphi_t + 2(k-1)\pi \leq \chi \leq \theta_t + 2k\pi; \\
 & (k = 1, 2, \ldots).
\end{array}$$

Il résulte immédiatement de cette définition que la famille possède toutes les propriétés spécifiées dans le théorème 4.

4. En faisant tendre la suite $\{n_k\}$ vers l'infini suffisamment vite, nous démontrerons que, pour la fonction $f(z)$, définie par (1), on peut faire croître vers l'infini le maximum du module sur les cercles concentriques aussi lentement que l'on veut.

LEMME 1. — *Si la suite $\{n_k\}$ satisfait à la condition*

(B) $$n_k \geq k n_{k-1}, \qquad n_1 > 1,$$

alors, sur la circonférence $|z| = \rho_k$, où ρ_k est donné par (12), on a

(13) $$|f(z)| < c_k . 5^k,$$

En tenant compte de (3), il résulte immédiatement de (9) que sur $|z| = \rho_k$,

$$|P_1(z)P_2(z)P_3(z)| \leqq 2.5^k.$$

Par des raisonnements analogues à ceux qui ont été employés pour obtenir (8) et en appliquant la condition (B), on voit que

$$(14) \qquad |P_3(z)| < \prod_{j=k+2}^{\infty}\left(1 + 4e^{-\frac{n_j}{n_{k+1}}}\right) < e^{4\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j}} = \frac{c_3}{2}.$$

Cela établit (13).

En posant $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $0 \leqq r < 1$, nous allons maintenant démontrer le

Théorème 5. — *Soit $\mu(r)$ une fonction positive, strictement croissante, quelconque, dans l'intervalle $0 \leqq r < 1$ telle que $\lim\limits_{r \to 1} \mu(r) = \infty$. Il existe alors une suite $\{n_k\}$ satisfaisant à* (B), *telle que pour la fonction $f(z)$, définie dans* (1), *on ait*

$$(15) \qquad M(r) < \mu(r), \qquad 1 - \frac{1}{n_1} \leqq r < 1.$$

Nous définissons la suite $\{n_k\}$ par induction complète comme suit. Déterminons $n_1 > 1$ de sorte que

$$\mu(\rho_1) > c_3.5^2$$

soit vérifié, où ρ_1 est donné par (12) et c_3 est la constante dans (14). Supposons que n_{k-1} ait été déjà déterminé et choisissons n_k de sorte que (B) soit satisfait, aussi bien que

$$\mu(\rho_k) > c_3.5^{k+1}.$$

Si r se trouve dans l'intervalle $\rho_k \leqq r \leqq \rho_{k+1}$, on obtient

$$M(r) \leqq M(\rho_{k+1}) < c_3.5^{k+1} < \mu(\rho_k) \leqq \mu(r),$$

ce qui démontre (15).

Il y a lieu de noter que, puisque (B) implique (A), la fonction $f(z)$ du théorème 5 jouit de toutes les propriétés spécifiées dans les théorèmes 1 à 4.

Ces propriétés sont aussi possédées par les fonctions définies par des produits de la forme

$$g(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left\{1 - \left(\frac{z}{1 - \frac{1}{n_j}}\right)^{m_j}\right\},$$

où la suite $\{m_k\}$ croit si vite en comparaison de $\{n_k\}$, que le maximum du module de $g(z)$ sur les cercles concentriques tend aussi rapidement que l'on veut vers l'infini, lorsque r s'approche de 1.

5. Théorème 6. — *Soit $\{n_k\}$ une suite croissante d'entiers positifs tels que*

$$\text{(C)} \qquad \left(\sum_{j=1}^{k-1} n_j\right)^2 < n_k, \qquad n_1 > 1.$$

Alors la fonction (1) *jouit de la propriété suivante,*

$$\lim_{|z| \to 1} \{|f(z)| + |f'(z)|\} = \infty,$$

uniformément en z.

Puisque la condition (A) est une conséquence de la condition (C), il suffit, d'après le théorème 1, de démontrer que

$$\text{(16)} \qquad \lim_{\substack{k \to \infty \\ z \in \Gamma_k}} |f'(z)| = \infty$$

uniformément en z.

La dérivée de (1) est

$$f'(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n_k}{\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}} z^{n_k - 1} \prod_{j \neq k}\left\{1 - \left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right\}\right],$$

d'où, pour z dans Γ_k, on obtient

$$\text{(17)} \qquad |f'(z)| \geq \frac{n_k}{\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}} |z|^{n_k-1} \prod_{j\neq k}\left|1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right| - \sum_{h\neq k}\left[\frac{n_h}{\left(1-\frac{1}{n_h}\right)^{n_h}}|z|^{n_h-1}\prod_{j\neq h}\left|1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right|\right] = T_1 - T_2.$$

Par un raisonnement analogue à celui employé dans la démonstration du théorème 1, on voit sans peine que, pour $z \in \Gamma_k$, où k est suffisamment grand,

$$\prod_{j\neq k}\left|1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right| > c_6\left(\frac{3}{4}e - 1\right)^{k-1},$$

de sorte que, pour le premier nombre T_1 de la partie droite de l'inégalité (17), on obtient la borne inférieure

$$T_1 > c_7 n_k \left(\frac{3}{4}e - 1\right)^{k-1}.$$

Pour le deuxième nombre T_2 dans (17), on a

$$T_2 < \sum_{h \neq k}\left[\frac{n_h}{\left(1-\frac{1}{n_h}\right)^{n_h}}|z|^{n_h-1}\prod_{j=1}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{|z|}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right\}\right].$$

Puisque la condition (B) est une conséquence de la condition (C), le théorème 5 s'applique quand $\mu(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r}}$, dont la démonstration montre que

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{|z|}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-|z|}}$$

pour $|z|$ suffisamment proche de l'unité. Donc, pour $z \in \Gamma_k$, où k est suffisamment grand, on obtient

$$\begin{aligned} T_2 &< c_8\sqrt{n_k}\left\{\sum_{h=1}^{k-1} n_h + \sum_{h=k+1}^{\infty} n_h\left(1-\frac{1}{n_k}+\frac{1}{k^2 n_k}\right)^{n_h-1}\right\} \\ &< c_9\sqrt{n_k}\left\{\sum_{h=1}^{k-1} n_h + \sum_{h=k+1}^{\infty} n_h e^{-\frac{n_h}{2n_k}}\right\} \\ &< c_9\sqrt{n_k}\left\{\sum_{h=1}^{k-1} n_h + \sum_{h=k+1}^{\infty} n_h e^{-\frac{\sqrt{n_h}}{2}}\right\}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de (C). Par conséquent, pour k suffisamment grand,

$$T_2 < c_9\sqrt{n_k}\left(\sum_{h=1}^{k-1} n_h + 1\right).$$

En revenant à (17), on obtient finalement

$$|f'(z)| > c_7 n_k\left(\frac{3}{4}e-1\right)^{k-1} - c_{10}\sqrt{n_k}\sum_{h=1}^{k-1} n_h,$$

dont (16) est une conséquence immédiate d'après la condition (C).

6. Nous allons maintenant établir l'existence d'une fonction $f(z)$ qui satisfait au théorème 3, mais qui ne possède aucune limite radiale. Nous allons démontrer d'abord un lemme élémentaire sur les polynomes :

Lemme 2. — *Soit n un entier positif quelconque et posons*

$$p_n(w) = 1 - w^n.$$

Il existe alors un ε, $0 < \varepsilon < 1$, et un δ, $\frac{1}{4} < \delta < \frac{1}{3}$, où ε et δ sont indépendants de n, tels que $|p_n(w)| < \varepsilon$ sur chaque arc A de la circonférence $|w| = 1$ autour d'un zéro de $p_n(w)$ comme milieu, de longueur égale à $\frac{2\pi\delta}{n}$.

En effet, l étant un entier quelconque inclus entre 0 et $n-1$, considérons le zéro $e^{\frac{2\pi i l}{n}}$ de $p_n(w)$. Désignons par B l'arc autour de ce zéro comme point milieu qui sous-tend l'angle

$$\frac{2\pi l}{n}-\frac{\pi}{3n}\leqq\theta\leqq\frac{2\pi l}{n}+\frac{\pi}{3n}$$

à l'origine. Pour w sur B, on a donc

$$-\frac{\pi}{3}\leqq\arg w^n\leqq+\frac{\pi}{3},$$

d'où $|p_n(w)|\leqq 1$. L'existence de l'arc A du lemme en résulte par continuité.

Nous sommes maintenant à même de démontrer le

THÉORÈME 7. — *Soit* $\{n_k\}$ *une suite croissante d'entiers positifs tels que*

$$k^2 n_{k-1}^8 < n_k, \qquad n_1 > 4. \tag{D}$$

Alors

$$f(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\prod_{h=1}^{4}\left\{1-\left(\frac{z\,e^{i(h-1)\alpha_j}}{1-\frac{1}{hn_j}}\right)^{n_j^2}\right\}^{n_j^{4h-4}}, \tag{18}$$

pour des nombres réels α_j *convenables, représente une fonction holomorphe dans* $|z|\leqq 1$ *dont le module tend uniformément vers l'infini sur la suite de circonférences* $|z|=1-\frac{2}{n_k}$ $(k=1, 2, \ldots)$, *mais qui ne possède aucune limite radiale.*

Nous allons d'abord spécifier les nombres réels α_j. Supposons que le nombre n dans le lemme 2 ait la valeur n_j^2 et désignons la réunion des arcs correspondants A par A_{n_j}. Puisque $\delta>\frac{1}{4}$, la mesure de A_{n_j} est $2\pi\delta>\frac{\pi}{2}$. Désignons par $A_{n_j}(\alpha)$ l'ensemble obtenu en assujettissant A_{n_j} à une rotation $w'=we^{-i\alpha}$. Alors il est évidemment possible de trouver un nombre réel α_j tel que $\bigcup_{h=1}^{4} A_{n_j}((h-1)\alpha_j)$ couvre la circonférence $|w|=1$ entière.

Soit $0\leqq\theta_0<2\pi$. Pour chaque j, il existe au moins un entier h_j, $1\leqq h_j\leqq 4$ (au cas où il y en a plus d'un, pour préciser, nous prendrons le plus petit), tel que

$$w_0=\frac{\left\{\left(1-\frac{1}{h_j n_j}\right)e^{i\theta_0}\right\}e^{i(h_j-1)\alpha_j}}{1-\frac{1}{h_j n_j}}\in A_{n_j}((h_j-1)\alpha_j). \tag{19}$$

Il est évident que la convergence absolue et uniforme du produit (18) dans chaque cercle $|z|\leqq\rho<1$ résulte de la condition (D).

En posant $|z| = 1 - \frac{2}{n_k}$ pour quelque k fixé, il résulte de (18) que

$$|f(z)| \geqq \left[\prod_{j=1}^{k-1}\prod_{h=1}^{k}\left\{\left(\frac{1-\frac{2}{n_k}}{1-\frac{1}{hn_j}}\right)^{n_j^2}-1\right\}^{n_j^{2h-1}}\right]\left[\prod_{j=k}^{\infty}\prod_{h=1}^{k}\left\{1-\left(\frac{1-\frac{2}{n_k}}{1-\frac{1}{hn_j}}\right)^{n_j^2}\right\}^{n_j^{2h-1}}\right]$$
$$= R_1(k)R_2(k),$$

d'où, par des raisonnements bien connus, on voit sans peine que

$$\lim_{k\to\infty} R_1(k) = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} R_2(k) = 1.$$

Donc, pour achever la démonstration du théorème 7, on n'a qu'à démontrer que $f(z)$ ne possède aucune limite radiale. Puisqu'une limite radiale, si elle existait, devrait être infinie, il suffit de montrer l'existence, sur chaque rayon, d'une suite de points s'approchant de $|z| = 1$, sur laquelle $f(z)$ tend vers zéro.

Soit $re^{i\theta_0}$, $0 \leqq r < 1$, un rayon quelconque du cercle-unité $|z| < 1$. Nous allons montrer que

$$(20) \qquad \lim_{k\to\infty} f\left[\left(1-\frac{1}{h_k n_k}\right)e^{i\theta_0}\right] = 0,$$

où les entiers h_k sont choisis selon (19). Pour chaque k et

$$z = \left(1-\frac{1}{h_k n_k}\right)e^{i\theta_0},$$

on a

$$|f(z)| \leqq \left[\prod_{j=1}^{k-1}\prod_{h=1}^{k}\left\{1+\left(\frac{1-\frac{1}{h_k n_k}}{1-\frac{1}{hn_j}}\right)^{n_j^2}\right\}^{n_j^{2h-1}}\right]\left[\prod_{h=1}^{k}\left|1-\left(\frac{\varepsilon\, e^{i(h-1)\alpha_k}}{1-\frac{1}{hn_k}}\right)^{n_k^2}\right|^{n_k^{2h-1}}\right]$$
$$\times\left[\prod_{j=k+1}^{\infty}\prod_{h=1}^{k}\left\{1+\left(\frac{1-\frac{1}{h_k n_k}}{1-\frac{1}{hn_j}}\right)^{n_j^2}\right\}^{n_j^{2h-1}}\right] = S_1(k)S_2(k)S_3(k).$$

Considérons le facteur décisif, $F(k)$, dans $S_2(k)$, qui correspond à $h = h_k$. En appliquant le lemme 2 et (19), on voit que ce facteur est inférieur à $\varepsilon^{n_k^{2h_k-1}}$. Le produit $S_1(k)$ et le produit des facteurs (s'il y en a) dans $S_2(k)$ correspondant à $h < h_k$ tendent vers l'infini, lorsque $k \to \infty$, mais, d'après la condition (D), avec un ordre plus bas que celui de $|F(k)|^{-1}$. D'autre part, le produit des facteurs (s'il y en a) dans $S_2(k)$ correspondant à $h > h_k$, et le produit $S_3(k)$ tendent vers l'unité, lorsque $k \to \infty$. Cela démontre (20).

7. Il est aussi possible d'obtenir une fonction satisfaisant au théorème 2 mais qui ne tend uniformément vers l'infini sur aucune suite de courbes de

Jordan dans $|z|<1$ dont chacune contient la précédente dans son intérieur. C'est une conséquence immédiate du

Théorème 8. — *Il existe une suite* $\{n_k\}$ *satisfaisant à la condition* (B) *telle que* $(1-z)f(z)$, *où* $f(z)$ *est défini par* (1), *tend vers l'infini sur presque tous les rayons du cercle-unité, et tend vers zéro sur le rayon* $\arg z = 0$.

En effet, il suffit de prendre $\mu(r) = \dfrac{1}{\sqrt{1-r}}$ dans le théorème 5.

Un exemple d'une fonction holomorphe, non bornée, dans $|z|<1$ qui n'a aucune limite radiale et qui ne tend vers l'infini sur aucune suite de courbes de Jordan, dont chacune contient la précédente dans son intérieur, est fourni par le

Théorème 9. — *Soit* $\{n_k\}$ *une suite croissante d'entiers positifs tels que*

$$\text{(E)} \qquad k^2 n_{k-1}^{8} < n_k < n_{k-1}^{9}.$$

Alors, la fonction $h(z) = f(z)g(z)$, *où* $f(z)$ *est donné par* (18) *et*

$$g(z) = e^{-e^{-\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{3}}},$$

est holomorphe et non bornée dans $|z|<1$, *ne possède aucune limite radiale et tend vers zéro lorsque* z *s'approche du point* $z=1$ *sur l'arc* $|z+i| = \sqrt{2}$.

Puisque la condition (E) entraîne la condition (D), il résulte du théorème 7 que $f(z)$ ne possède aucune limite radiale. De plus, $g(z)$ tend vers 1 sur le rayon $\arg z = 0$ et tend vers des limites finies, différentes de zéro, sur tous les autres rayons. Ainsi, $h(z)$ n'a aucune limite radiale.

Pour achever la démonstration, il suffit de noter que, lorsque $z \to 1$ sur l'arc $|z+i| = \sqrt{2}$, $g(z) \to 0$ comme $e^{-e^{\frac{c_{11}}{1-|z|}}}$, tandis que

$$|f(z)| = O\left(e^{\frac{c_{11}}{(1-|z|)^{9}}}\right),$$

celui-ci étant une conséquence de la deuxième inégalité dans (E).

Si une fonction holomorphe, non bornée dans $|z|<1$ reste bornée sur un chemin spiralique qui s'approche de $|z|=1$ asymptotiquement (*cf.* Valiron [8]), alors elle possède aussi les propriétés constatées dans le paragraphe antérieur au théorème 9.

Après l'achèvement de cet article, les auteurs ont connu deux mémoires de J. Wolff, *On the boundary limit infinite of a holomorphic function* (*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings of the Section of Sciences*, t. 31, 1928, p. 718-720) et *Sur les limites radiales d'une fonction* *holomorphe dans un cercle* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 56, 1928, p. 167-173) dans lesquels M. Wolff obtient les résultats de nos théorèmes 1, 2, 3, ainsi que notre remarque à la fin du paragraphe 4. Ces résultats ont été obtenus par M. Wolff par l'emploi de produits infinis très semblables aux nôtres.

Bibliographie.

[1] H. Cartan, *Sur les variétés définies par une relation entière* (*fin*) (*Bull. Sc. Math.*, (2), t. 55, 1931, p. 47-64).

[2] E. F. Collingwood et M. L. Cartwright, *Boundary theorems for a function meromorphic in the unit circle* (*Acta Mathematica*, t. **87**, 1952, p. 83-146).

[3] P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles* (troisième Mémoire) (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **48**, 1920, p. 208-314).

[4] E. Kamke, *Theory of Sets*, New-York, 1950.

[5] N. Lusin et J. Priwaloff, *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. **42**, 1925, p. 143-191).

[6] P. Montel, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, Paris, 1910.

[7] J. J. Priwaloff, *Propriétés frontières des fonctions analytiques* (en russe), 2e édition, Moscou-Léningrad, 1950.

[8] G. Valiron, *Sur les singularités des fonctions holomorphes dans un cercle* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **198**, 1934, p. 2065-2067).