KÜLÖNLENYOMAT

MATEMATIKAI LAPOK

VII. ÉVFOLYAM 1—2. SZÁMÁBÓL

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1956

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.
Budapest, 1956. május, VII. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd.
Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.
A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.
Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850. Csekkszámlaszám: 61 257.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Erdös Pál

Megjegyzések a Matematikai Lapok két feladatához

Megjegyzések a Matematikai Lapok két feladatához

Erdős Pál

A Matematikai Lapokban megjelent a következő feladat[1]: Bebizonyítandó, hogy minden ε-hoz megadható oly a, amelyre $\varphi(a)+\varphi(a+1)<\varepsilon a$, ($\varphi(a)$ az Euler-féle φ függvényt jelenti.)

Talán nem lesz érdektelen megvizsgálni, vajon mennyire élesíthető a feladat állítása — annál is inkább, mert elemi analitikus számelméleti módszerekkel kérdésünkre válaszolni tudunk s az érdeklődő olvasó e módszerekkel aránylag könnyen megismerkedhetik. Az is jól látható lesz, hogy hogyan jönnek létre azok a tételek, melyekben többszörösen iterált logaritmusok szerepelnek, melyek az analitikus számelmélettől távolesőket sokszor furcsa hangzásuknál fogva mulattatják.

E cikkben $c_1, c_2, \ldots$ pozitív konstansokat fognak jelölni, $\log_r n$ az r-szer iterált logaritmust jelöli, $L_n=[\log_3 n/\log_4 n]$.

I. TÉTEL. *Minden $\varepsilon>0$-hoz létezik oly $n_0=n_0(\varepsilon)$, hogy minden $n>n_0$-hoz van oly $a<n$, melyre*

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi(a+L_n)<\varepsilon a.$$

II. TÉTEL. *Minden pozitív η-ra fennáll, hogy*

$$\liminf_{a=\infty}\,[\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi(a+(1+\eta)L_a)]/a=\infty.$$

A II. tétel nyilván azt jelenti, hogy az első tételben foglalt állítás tovább nem élesíthető.

Első pillanatban talán azt gondolhatnánk, hogy az I. és II. tételek problémánk teljes megoldását tartalmazzák. E tételek azonban még a következő módon élesíthetők.

[1] MEDGYESSY PÁL, II. (1951), 145. o. 40-ik feladat, LIPTÁK JÓZSEF és TAKÁCS LAJOS megjegyzik, hogy minden k-hoz és ε-hoz van oly a, melyre $\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi(a+k)<\varepsilon a$. IV. (1953), 38—39.

III. TÉTEL:

$$\liminf_{n=\infty}\Big[\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots$$
$$+\varphi\left(\left[a+\frac{\log_3 a}{\log_4 a-\log_5 a}+\frac{c\log_3 a}{(\log_4 a)^2}\right]\right)\Big]\Big/ a=e^C/\alpha,$$

ahol $\alpha=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1/p}$ *(a szorzat nyilván konvergens).*

A III. tételt nem fogjuk bebizonyítani, ugyanis a bizonyítás azonos, csak kissé komplikáltabb, mint az I. és II. tételek bizonyításai. Tudtommal itt fordul elő először egy tételben ötszörösen iterált logaritmus.

LANDAUtól[2] származik a következő tétel:

$$\liminf_{n=\infty}\varphi(n)\log_2 n/n=e^{-C},$$

ahol C az Euler konstanst jelöli. Legyen $g(n)$ n-nek nem csökkenő függvénye, ($g(n)$ állandó is lehet). Fennáll

IV. TÉTEL.

$$\liminf_{n=\infty}\max(\varphi(n),\varphi(n+1),\ldots,\varphi(n+[g(n)]))\,(e^C\log_2 n)^{1/[g(n)+1]}/n=1.$$

Amennyiben $g(n)\to\infty$ az $(e^C)^{1/g(n)+1}$ faktor természetesen 1-gyel helyettesítendő.

A IV. tételből következik, hogyha $g(n)\log_3 n\to\infty$, akkor

$$\liminf_{n=\infty}\max(\varphi(n),\varphi(n+1),\ldots,\varphi(n+[g(n)]))/n=1.$$

Ennél azonban lényegesen élesebb tételt mondottam ki egy régebbi dolgozatomban.[3] A IV. tételt se fogjuk bebizonyítani, mert a bizonyítás hasonló az I. és II. tételek bizonyításához.

Egy n számot akkor nevezünk abundánsnak, ha $\sigma(n)\geqq 2n$, ahol $\sigma(n)$ n osztóinak összegét jelenti. Egy régebbi dolgozatomban[3] bebizonyítottam, hogy létezik két konstans c_1 és c_2 úgy, hogy van $c_1\log_3 n$ n-nél kisebb konzekutív abundáns szám, de nincs $c_2\log_3 n$ n-nél kisebb konzekutív abundáns szám. A következő élesebb tételt tudom bebizonyítani:

V. TÉTEL. *Létezik két folytonos függvény* $f(x)$ *és* $g(x)$, $f(x)$ *az* $(1,\infty)$ *intervallumban van definiálva,* $f(1)=\infty$, $f(\infty)=0$,

[2] Arch. Math. und Phys. (1903), 86—91.

[3] Note on consecutive abundant numbers, Journal London Math. Soc. 10 (1935), 128—131.

$f(x)$ szigorúan monoton csökkenő, $g(x)$ a $(0,1)$ intervallumban van definiálva s ott szigorúan monoton növekvő, $g(0)=0$, $g(1)=\infty$, úgyhogy azon n alatti leghosszabb konzekutív egész számokból álló sorozat hossza, melyekre vagy $\sigma(a)>ax$, vagy $\varphi(a)<ax$, $(1+o(1))f(x)\log_3 n$, vagy $(1+o(1))g(x)\log_3 n$ alakú.

Az V. tétel bizonyítását szintén nem közöljük, mert hasonlít az I. és II. tételek bebizonyításához s egy régebbi dolgozatomban levő bizonyításhoz.[3]

TURÁNtól[4] származik a következő feladat: Jelölje $d(n)$ n osztóinak számát. Létezik-e tetszőleges nagy pozitív k-hoz oly n, hogy

$$d(n)<d(n+1)-k \quad \text{és} \quad d(n)<d(n-1)-k. \tag{1}$$

Ismeretes, hogy $d(n)$ maximuma $2^{\log n/\log_2 n}$ rendű (e tétel WIGERT-től való),[5] ez pontosan azt jelenti, hogyha $\varepsilon>0$ tetszés szerinti pozitív szám, akkor minden $n>n_0(\varepsilon)$-ra $d(n)<2^{(1+\varepsilon)\log n/\log_2 n}$, viszont végtelen sok n-re $d(n)>2^{(1-\varepsilon)\log n/\log_2 n}$. (1) már most következőképpen élesíthető: Minden $\varepsilon>0$-hoz található oly $l=l(\varepsilon)$, hogy végtelen sok n-re fennáll, hogy

$$d(n)<l, \quad d(n+1)>2^{(1/2-\varepsilon)\log n/\log_2 n}, \quad d(n-1)>2^{(1/2-\varepsilon)\log n/\log_2 n} \tag{2}$$

(2) valószínűleg tovább nem élesíthető, azaz $\frac{1}{2}-\varepsilon$ nem helyettesíthető $\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$-nal. (2) bizonyítását nem részletezzük, elég egyszerűen következik BRUN módszerének alkalmazásával, (1) és (2)-höz hasonlóan vizsgálhatjuk, milyen éles lokális maximuma lehet $d(n)$-nek. Itt a következő bizonyítható: minden $\varepsilon>0$-hoz létezik végtelen sok n, melyre

$$d(n)>2^{(1-\varepsilon)\log n/\log_2 n}[\max(d(n+1),d(n-1))]. \tag{3}$$

(3) bizonyítását szintén nem részletezzük, BRUN módszerével itt is könnyen célt érünk, itt azonban Brun módszere valószínűleg elkerülhető lesz (lásd a Mat. Lapok-ban rövidesen megjelenendő feladatom megoldását).

Valószínűnek látszik különben, hogy $n>n_0(\varepsilon)$ esetén

$$d(n(n+1))=d(n)d(n+1)<2^{(1+\varepsilon)\log n/\log_2 n}. \tag{4}$$

[4] Mat. Lapok V. (1954), 48. 71. feladat.

[5] Lásd pl. E. Trost Primzahlen, vagy pedig Hardy—Wright Number Theory third edition. Lásd még Kalmár László, Középiskolai Mat. Lapok II. (1950), 91.

Azonban (4) bebizonyítása igen nehéznek látszik. A főnehézség a következő: Ha $(A, B) = 1$, akkor mindig van oly $0 < x \leqq AB$, melyre $x \equiv 0 \pmod{A}$, $x \equiv 1 \pmod{B}$. A „baj" mármost az, hogy nem ismeretes oly használható feltétel, mely $x > (AB)^{1-\varepsilon}$-t tudna biztosítani.

Felvethető még a következő kérdés: Melyik a leghosszabb n alatti sorozat, melyre $\sigma(a) < \sigma(a+1) < \cdots < \sigma(n+k)$?

VI. TÉTEL. *Legyen* $T_n = [\log_3 n / \log_6 n]$, $i_1, i_2, \ldots, i_{T_n}$ *az* $1, 2, \ldots, T_n$ *számok egy tetszésszerinti permutációja. Akkor ha* $n > n_0(\varepsilon)$, *létezik oly* $a < n$, *melyre* $\sigma(a+i_1) < \sigma(a+i_2) < \cdots < \sigma(a+i_{T_n})$. *Ezzel szemben, ha* $n > n_0(\varepsilon)$, *nincs oly* $a < n$, *melyre* $\sigma(a) < < \sigma(a+1) < \cdots < \sigma(a+[(1+\varepsilon)T_n])$, *vagy* $\sigma(a) > \sigma(a+1) > \cdots \cdots > \sigma(a+[(1+\varepsilon)T_n])$. *Ugyanily tétel érvényes a* φ *függvényre*

VII. TÉTEL. *Legyen* $k = (\log n)^{1/2-\varepsilon}$ $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *az* $1, 2, \ldots, k$ *számok egy tetszésszerinti permutációja. Akkor ha* $n > n_0(\varepsilon)$ *létezik oly* $a < n$, *melyre* $d(a+i_1) < d(a+i_2) < \cdots < d(a+i_k)$.

A VI. és VII. tételekre még más helyen vissza fogok térni, valószínűnek látszik, hogy a VII. tétel nem marad igaz, ha $(\log n)^{1/2-\varepsilon}$-t $(\log n)^{1/2+\varepsilon}$-nal helyettesítjük.

Az I. TÉTEL *bizonyítása.* Legyen

$$A_n = \prod_{p < \frac{1}{2}\log n} p.$$

Ismeretes, hogy $\prod_{p<x} p < 4^x$[5] s ezért $A_n < n/2$. MERTENS[6] ismert tétele szerint

$$\varphi(A_n)/A_n = \prod_{p < \frac{1}{2}\log n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = (1 + o(1)) e^{-C} / \log_2 n. \tag{5}$$

Létezik mármost oly $a_1, a_2, \ldots, a_{L_n}$ sorozat, melyre $(a_1 \cdot a_2 \cdots a_{L_n}) \mid A_n$ és

$$\varphi(a_i)/a_i = (1 + o(1)) (\log_2 n)^{-1/L_n} = (1 + o(1))/\log_3 n, \qquad 1 \leqq i \leqq L_n. \tag{6}$$

(6) bizonyítása igen egyszerű. Legyen

$$a_1 = 2 \cdot 3 \ldots p_{s_1}, \quad a_2 = \prod_{s_1+1}^{s_2} p_j, \ \ldots, \quad a_i = \prod_{s_{i-1}+1}^{s_i} p_j \ldots, \qquad 1 \leqq i \leqq L_n$$

[6] Hardy—Wright (second edition) 349.

ahol p_{s_i}, $1 \leqq i \leqq L_n$ a következő módon van definiálva:

$$\prod_{s_{i-1}+1}^{s_i+1}\left(1-\frac{1}{p}\right) < \frac{1}{\log_3 n} < \prod_{s_{i-1}+1}^{s_i}\left(1-\frac{1}{p}\right). \tag{7}$$

(5)-ből és (7)-ből nyilván következik, hogy

$$\varphi(a_i)/a_i = (1+o(1))/\log_3 n \quad \text{és} \quad \prod_{j=1}^{s_{L_n}}\left(1-\frac{1}{p_j}\right) > \frac{1}{\log_2 n},$$

azaz (6) fennáll és (5) miatt $p_{s_{L_n}} < \frac{1}{2}\log n$ s ezzel állításunk igazolva van.

Legyen mármost

$$x+i \equiv 0 \pmod{a_{i+1}},\ 0 \leqq i \leqq L_n - 1,\ \frac{n}{2} < x < n, \tag{8}$$

x, $(\bmod\, a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)$ egyértelműen meg van határozva s ezért $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{L_n} \leqq A_n < \frac{n}{2}$ miatt (8) megoldható. Mármost $L_n < \log_3 n$ és (6) és (8) miatt

$$\begin{aligned}\varphi(x+i)/x < (1+o(1))\,\varphi(x+i)/(x+i) \leqq \varphi(a_{i+1})/a_{i+1} = \\ = (1+o(1))/\log_3 n.\end{aligned} \tag{9}$$

Tehát (9) miatt

$$(\varphi(x)+\varphi(x+1)+\cdots+\varphi(x+L_n))/x < (1+o(1))L_n/\log_3 n < \varepsilon$$
$$n > n_0\text{-ra}$$

s ezzel az I. tétel be van bizonyítva.

A II. TÉTEL *bebizonyítása*. Legyen

$$\varphi'(a) = \prod{}'\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

ahol Π' azt jelenti, hogy $p|a$, $p < 2\log a$. Könnyű belátni, hogyha $a < 2n$, akkor

$$\varphi'(a) = (1+o(1))\varphi(a). \tag{10}$$

Ugyanis a nyilván legfeljebb $\log a/\log_2 a$ $2\log a$-nál nagyobb prímszámmal lehet osztható, ezért

$$\varphi(a) \leqq \varphi'(a) < \varphi(a)\left(1-\frac{1}{2\log a}\right)^{-\log a/\log_2 a} = (1+o(1))\,\varphi(a),$$

ezzel tehát (10) be van bizonyítva. (10) miatt nyilván elég lesz bebizonyítani, hogy minden $\eta > 0$-ra

$$\liminf_{a=\infty} (\varphi'(a)+\varphi'(a+1)+\cdots+\varphi'(a+[(1+\eta)L_a]))/a=\infty. \quad (11)$$

Legyen

$$\varphi'(a+i)/(a+i)=\alpha_i.$$

(11) helyett nyilván elég lesz bebizonyítani, hogy

$$\Sigma\alpha_i \to \infty, \; 0 \leqq i \leqq [(1+\eta)L_a]. \quad (12)$$

Fennáll

$$\Pi\alpha_i \geqq \prod_{p<2\log a}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{(1+\eta)L_a/p+1} =$$

$$=\prod_{p<2\log a}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{p<2\log a}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{(1+\eta)L_a/p} > \frac{c_1}{\alpha^{(1+\eta)L_a}\log_2 a},$$

$$\left(\alpha=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1/p}\right).$$

Minthogy azonban a számtani közép nagyobb, mint a mértani, nyerjük, hogy

$$\Sigma\alpha_i \geqq [(1+\eta)L_a]\left(\frac{c_1}{\alpha^{(1+\eta)L_a}\log\log a}\right)^{1/(1+\eta)L_a} > c_2L_a/(\log_2 a)^{1/(1+\eta)} \to \infty$$

ha $a\to\infty$,

amivel (12) s ezért a II. tétel be van bizonyítva.

A legutóbbi időben SCHINZEL bebizonyította a következő tételt: Legyenek $a_i > 0$, $1 \leqq i \leqq k$, akkor létezik egész számok oly végtelen sorozata, melyre

$$\lim_{l=\infty}\frac{\varphi(n_l+i+1)}{\varphi(n_l+i)}=a_i,\; 1 \leqq i \leqq k.$$

Ugyanilyen tétel érvényes $\sigma(n)$-re is. Ezzel kapcsolatban a következő tételt bizonyítottam be:

Létezik oly végtelen sorozat n_l, melyre

$$\lim_{l=\infty}\frac{\max\varphi(n_l+i_1)}{\min\varphi(n_l+i_2)}=1,\; 1 \leqq i_1,\, i_2 < \left[(1-\varepsilon)\frac{\log_3 n}{\log_6 n}\right].$$

Ezzel szemben $\lim_{n=\infty}\max\dfrac{\varphi(n+i+1)}{\varphi(n+i)}=\infty$, $\lim\min\dfrac{\varphi(n+i+1)}{\varphi(n+i)}=0$,

$$1 \leqq i < \left[(1+\varepsilon)\frac{\log_3 n}{\log_6 n}\right].$$

Ugyanilyen tétel érvényes $\sigma(n)$-re is.

О ДВУХ ЗАДАЧАХ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ЖУРНАЛЕ „MATEMATIKAI LAPOK“

П. Ердёш

(Резюме)

Пусть будет $L_n = [\log_3 n/\log_4 n]$. [$\log_r n$ = продукт логарифмирования, повторенного в r раз.) В этом случае для каждого ε и $n > n_0$ существует $a < n$, для которого

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi(a + L_n) < \varepsilon a.$$

С другой стороны для каждого $\eta > 0$

$$\liminf_{a\to\infty} \frac{\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi[a + (1+\eta) L n]}{a} = \infty.$$

Далее утверждается (без доказательства), что

$$\liminf_{a\to\infty} \frac{\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi\left(a + \frac{\log_3 a}{\log_4 a - \log_5 a} + \frac{c \log_3 a}{(\log_4 a)^2}\right)}{a} = \frac{e^c}{\alpha}.$$

$$\alpha = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/p}.$$

Даются далее несколько других результатов без доказательства, из которых здесь приводятся только:

Пусть $k_n = \dfrac{\log_3 n}{\log_6 n}$ и пусть $i_1, i_2, \ldots, i_{k_n}$ будет любая перестановка селых $1, 2, \ldots, k_n$. Тогда для $n > n_0$ существует $a < n$, причем

$$\varphi(a + i_1) > \varphi(a + i_2) > \cdots > \varphi(a + ik_n).$$

С другой стороны для $n > n_0(\varepsilon)$

$$\varphi(n) > \varphi(n+1) > \cdots > \varphi[n + (1+\varepsilon) k_n]$$

не может быть справедливым. Эти же самые результаты справедливы для $\sigma(n)$ вместо $\varphi(n)$.

REMARKS ON TWO PROBLEMS OF THE MATEMATIKAI LAPOK

Let $L_n = [\log_3 n/\log_4 n]$. [$\log_r n$ denotes the r times iterated logarithm). Then for every ε and $n > n_0$ there exists an $a < n$ for which

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi(a + L_n) < \varepsilon a.$$

On the other hand for every $\eta > 0$

$$\liminf_{a\to\infty} \frac{\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi(a + (1+\eta) L_n)}{a} = \infty.$$

Further it is stated without giving the proof that

$$\liminf_{a\to\infty} \frac{\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi\left(a+\dfrac{\log_3 a}{\log_4 a-\log_5 a}+\dfrac{c\log_3 a}{(\log_4 a)^2}\right)}{a}=\frac{e^c}{\alpha}.$$

$$\alpha=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1/p}.$$

Several other results are stated without proof, here we mention only one: Put $k_n=\dfrac{\log_3 n}{\log_6 n}$ and let $i_1, i_2, \ldots, i_{k_n}$ be any permutation of the integers $1, 2, \ldots, k_n$. Then for $n>n_0$ there exists an $a<n$ so that

$$\varphi(a+i_1)>\varphi(a+i_2)>\cdots>\varphi(a+i_{k_n}).$$

On the other hand for $n>n_0(\varepsilon)$

$$\varphi(n)>\varphi(n+1)>\cdots>\varphi(n+(1+\varepsilon)k_n)$$

can not hold. The same results hold for $\sigma(n)$ instead of $\varphi(n)$.

СОДЕРЖАНИЕ

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

CONTENT

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki felelős: Szöllőssy Károly

Szegedi Nyomda Vállalat 55 6394 — Felelős vezető: Vincze György