Einige Bemerkungen zur Arbeit von A. Stöhr: „Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe".

Von *P. Erdös* in Haifa*).

---

1. In der betreffenden Arbeit von A. Stöhr [1] wird in § 5, Seite 53, die Frage aufgeworfen, welche Mächtigkeit die Klasse der Minimalbasen 7. Art der Ordnung h ($h \geqq 2$) besitzt. Obwohl diese Frage von E. Härtter [2] schon beantwortet wurde, dürfte doch der folgende Beweis von Interesse sein.

Satz 1. *Die Klasse der Minimalbasen 7. Art der Ordnung h($h \geqq 2$) hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis. Bei Stöhr [1] wird bewiesen, daß jede Basis der Ordnung h eine Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h^* \geqq h$ als Teilmenge enthält. Also wird es genügen, eine kontinuummächtige Klasse K von Basen $\mathfrak{B}$ zweiter Ordnung anzugeben, so daß der Durchschnitt $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ je zweier Elemente $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in K$ endlich ist. Die in diesen Basen $\mathfrak{B}_i \in K$ enthaltenen Minimalbasen 7. Art sind dann offenbar voneinander verschieden. — Demnach können wir uns für den weiteren Verlauf des Beweises auf die Ordnung $h = 2$ beschränken.

Es sei $0 \leqq \alpha < 1$ und $a_k^{(\alpha)} = [(k + \alpha) \log k]$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Sei $\mathfrak{B}_\alpha$ die Folge natürlicher Zahlen, deren Elemente die Zahlen $a_k^{(\alpha)}$ und $a_k^{(\alpha)} + 1$ sind $(k = 2, 3, \ldots)$. Wir beweisen zuerst, daß für $0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ der Durchschnitt $\mathfrak{B}_{\alpha_1} \cap \mathfrak{B}_{\alpha_2}$ endlich ist. Es genügt zu zeigen, daß für genügend großes k die Zahlen $[(k + \alpha_1) \log k] + \varepsilon$ ($\varepsilon = 0$ oder 1) nicht in $\mathfrak{B}_{\alpha_2}$ liegen. Wenn nämlich

$$[(k + \alpha_1) \log k] + \varepsilon_1 = [(k' + \alpha_2) \log k'] + \varepsilon_2, \ 0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < 1, \ \varepsilon_i = 0 \text{ oder } 1 \ (i = 1, 2),$$

wäre, so wäre für genügend großes k offenbar $k = k'$ und daher $\alpha_1 = \alpha_2$, was falsch ist.

Nun beweisen wir, daß jede genügend große Zahl als Summe zweier Zahlen aus $\mathfrak{B}_\alpha$ darstellbar, d. h. $\mathfrak{B}_\alpha$ asymptotische Basis zweiter Ordnung ist. Dies folgt aus Sätzen von Kuzmin [3] und Segal [4]. Kuzmin und Segal beweisen nämlich, daß, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben ist, immer eine Zahl $t_0 = t_0(\varepsilon)$ existiert, so daß für $t > t_0$ das Intervall $(t, t + \varepsilon)$ Zahlen von der Form $x \log x + y \log y$ (x, y natürliche Zahlen) enthält; dieser Beweis läßt sich auch auf Zahlen von der Form $(x + \alpha) \log x + (y + \alpha) \log y$ übertragen. Wenn wir nun $\varepsilon = 1$ und $t = n > t_0$ setzen, so folgt, daß ganze Zahlen x und y existieren mit der Eigenschaft

$$n < (x + \alpha) \log x + (y + \alpha) \log y < n + 1.$$

---

*) Es handelt sich hierbei um Auszüge aus Briefen von P. Erdös an A. Stöhr zu der obengenannten Arbeit, die für den Druck freundlicherweise von E. Härtter bearbeitet wurden.

Also gilt entweder

$$n = [(x + \alpha) \log x] + [(y + \alpha) \log y]$$

oder

$$n - 1 = [(x + \alpha) \log x] + [(y + \alpha) \log y].$$

Im ersten Fall ist die Basiseigenschaft bewiesen; im zweiten Fall setzen wir

$$n = \big([(x+\alpha) \log x] + 1\big) + [(y + \alpha) \log y],$$

womit auch hier gezeigt ist, daß sich jede genügend große Zahl n als Summe zweier Zahlen aus $\mathfrak{B}_\alpha$ darstellen läßt.

Schließlich ergänzen wir noch $\mathfrak{B}_\alpha$ durch Hinzufügen endlich vieler Elemente zu einer Basis zweiter Ordnung, was den Beweis vollendet.

2. In der Stöhrschen Arbeit wird in § 11, Seite 124, folgende Frage aufgeworfen:

Sei $\mathfrak{P}$ die Menge der Primzahlen und $\mathfrak{B}$ eine beliebige Basis zweiter Ordnung. Ist dann die Dichte von $\mathfrak{P} + \mathfrak{B}$ positiv?

Diese Frage möchte ich verneinen, denn es gilt der

Satz 2. *Es gibt eine Basis $\mathfrak{B}_0$ zweiter Ordnung derart, daß die Dichte von $\mathfrak{P} + \mathfrak{B}_0$ gleich 0 ist.*

Beweis. Sei

$$n_1 = 1,$$
$$n_{k+1} = \prod_{p < e^{n_k}} p \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

also $n_k \mid n_{k+1}$. Dann ist $n_{k+1} \geqq 2n_k$, wie man leicht durch einen induktiven Schluß bestätigt: Es ist $n_2 = \prod_{p<e} p = 2 \geqq 2n_1$. Sei nun schon für alle $\varkappa \leqq k - 1$ bewiesen, daß $n_{\varkappa+1} \geqq 2n_\varkappa$ gilt. Dann erhalten wir

$$2n_k = 2 \prod_{p < e^{n_{k-1}}} p < \prod_{p < e^{n_k}} p = n_{k+1},$$

weil $n_k \geqq 2n_{k-1}$ ist und daher nach dem bekannten Primzahlsatz zwischen $e^{n_{k-1}}$ und e^{n_k} mindestens eine Primzahl liegt.

Nun definieren wir $\mathfrak{B}_0$ als die Vereinigungsmenge

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k \cup \{0\}$$

der Mengen $\mathfrak{B}_k$ mit 0, wobei $\mathfrak{B}_k$ aus den Zahlen $n_k \leqq b \leqq 2n_k$ und den Zahlen $b \equiv 0 \pmod{n_k}$, $2n_k \leqq b \leqq n_{k+1}$, besteht. Offenbar ist dann $\mathfrak{B}_0$ eine Basis zweiter Ordnung.

Wir zeigen nun, daß die Dichte von $\mathfrak{P} + \mathfrak{B}_0$ gleich 0 ist. Zu diesem Zweck teilen wir die Zahlen $t = p + b \leqq n_{k+1}$, $p \in \mathfrak{P}$, $b \in \mathfrak{B}_0$, in zwei Klassen ein. Die erste Klasse besteht aus allen Zahlen t mit $b \leqq 2n_k$. Die Anzahl dieser Zahlen ist kleiner als

$$(2n_k + 1) \cdot \pi(n_{k+1}) < cn_k \frac{n_{k+1}}{\log n_{k+1}} = o(n_{k+1}).$$

Denn es folgt aus dem Primzahlsatz (oder auch aus einem mehr elementaren Resultat), daß

$$\log n_{k+1} = \sum_{p < e^{n_k}} \log p > ce^{n_k},$$

also

$$\frac{n_k}{\log n_{k+1}} = o(1)$$

ist.

Die zweite Klasse enthält die Zahlen $t = p + b \leqq n_{k+1}$ mit $b > 2n_k$, also mit $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n_k)$. Wenn $p \leqq n_k$ ist, so ist die Anzahl dieser Zahlen höchstens

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot \pi(n_k) = o(n_{k+1}).$$

Für $p > n_k$ sind wegen $b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n_k)$ die Zahlen $p + b$ zu n_k teilerfremd, also ist in diesem Fall die Anzahl der Zahlen t höchstens

$$n_{k+1} \cdot \prod_{p \leqq n_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = o(n_{k+1}),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

3. Eine Basis $\mathfrak{B} = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ $(b_0 = 0 < b_1 = 1 < b_2 < \cdots)$ der endlichen Ordnung h heißt *beständige Basis*, wenn für jede Folge von Indizes n_i $(n_0 = 0, n_1 = 1)$ mit positiver Dichte die Teilmenge

$$\mathfrak{B}' = \{b_{n_0}, b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots\} \qquad (b_{n_0} = 0 < b_{n_1} = 1 < b_{n_2} < \cdots)$$

aus $\mathfrak{B}$ wieder eine Basis endlicher Ordnung ist.

Dann gilt

Satz 3. *Es gibt eine Zahl l, die nur von $\mathfrak{B}$ und der Dichte α der Folge $\{n_i\}$ abhängt, so daß die Ordnung von $\mathfrak{B}'$ kleiner als l ist.*

Hiermit wird eine von Stöhr [1], Seite 117, aufgeworfene Frage positiv beantwortet.

Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre falsch; dann gäbe es eine Zahl $\alpha_0 > 0$ und eine Folge von Folgen $\mathfrak{A}_k = \{n_i^{(k)}\}$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit Dichten $> \alpha_0$, so daß die Teilmengen $\mathfrak{B}'_k = \{b_{n_0^{(k)}}, b_{n_1^{(k)}}, \ldots\}$ $(b_{n_0^{(k)}} = 0 < b_{n_1^{(k)}} = 1 < b_{n_2} < \cdots)$ aus $\mathfrak{B}$ keine Basen mit Ordnungen $\leqq l$ (l fest) wären. Dies würde aber bedeuten, daß es zwei sehr rasch gegen unendlich strebende Folgen $\{l_i\}$ und $\{m_i\}$ mit $l_1 < m_1 < l_2 < m_2 < \cdots, l_k > m_{k-1}^2$, gibt, so daß m_k nicht als Summe von weniger als l_k Elementen aus $\mathfrak{B}'_k$ darstellbar ist.

Wir betrachten nun die Folge $N_0 = 0, N_1 = 1, N_2, \ldots$, deren Elemente im Intervall $m_{k-1} \leqq x \leqq m_k$ die Zahlen $n_i^{(k)}$ sind. Wenn m_k genügend rasch gegen unendlich strebt, so ist es klar, daß die Dichte der Folge $\{N_i\}$ positiv ist. Wir zeigen nun, daß

$$\mathfrak{N} = \{b_{N_0}, b_{N_1}, b_{N_2}, \ldots\} \qquad (b_{N_0} = 0 < b_{N_1} = 1 < b_{N_2} < \cdots)$$

keine Basis endlicher Ordnung ist, und mit diesem Widerspruch wird unser Beweis vollendet sein.

Zu diesem Zweck beweisen wir, daß die Anzahl der Summanden $b_{N_i} \in \mathfrak{N}$, die wir zur Darstellung von m_k brauchen, mit k gegen unendlich strebt. Nehmen wir an, es gäbe ein c so, daß jedes m_k als Summe von höchstens c Summanden $b_{N_i} \in \mathfrak{N}$ darstellbar ist. Sei also

$$m_k = b^{(1)} + b^{(2)} + \cdots + b^{(c_1)}, \quad c_1 \leqq c, \ 0 < b^{(i)} \in \mathfrak{N}.$$

Wir wählen die Numerierung so, daß $b^{(1)}, \ldots, b^{(r)} (r \leqq c_1)$ kleiner als m_{k-1} sind und $b^{(r+1)}, \ldots, b^{(c_1)}$ im Intervall $m_{k-1} \leqq x \leqq m_k$ liegen. Also können wir schreiben

$$(1) \qquad m_k = 1 + 1 + \cdots + 1 + b^{(r+1)} + \cdots + b^{(c_1)},$$

wobei der Summand 1 $(b^{(1)} + b^{(2)} + \cdots + b^{(r)})$-mal auftritt. Alle Summanden in (1) sind Elemente aus der Menge $\mathfrak{B}'_k$, also ist m_k als Summe von höchstens $c + cm_{k-1}$ Elementen aus $\mathfrak{B}'_k$ darstellbar, was aber für genügend großes k wegen

$$l_k > m_{k-1}^2 > c + cm_{k-1}$$

einen Widerspruch bedeutet, womit Satz 3 bewiesen ist.

Literaturverzeichnis.

[1] *A. Stöhr*, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. Journal für reine u. angew. Math. **194** (1955), 40—65, 111—140.

[2] *E. Härtter*, Ein Beitrag zur Theorie der Minimalbasen. Journal für reine u. angew. Math. **196** (1956), 170—204.

[3] *R. Kuzmin*, Sur quelques approximations transcendantes de Diophante. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. Nr. **1** (1933), 9—13.

[4] *B. Segal*, Application of the Theorem concerning the fractional parts of a function to a certain additive problem. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. Nr. **1** (1933), 5—8.

Eingegangen 10. Januar 1956.