57/3

KÜLÖNLENYOMAT

MATEMATIKAI LAPOK

VIII. ÉVFOLYAM 1—2. SZÁMÁBÓL

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1957

Néhány geometriai problémáról

ERDŐS PÁL

E cikkben néhány geometriai problémát fogok diszkutálni, melyekkel az utóbbi években foglalkoztam. A problémák kombinatórikai természetűek. Hasonló kérdésekkel foglalkozik HADWIGER nemrég megjelent érdekes cikke.[1]

1. Legyen adva n különböző pont a síkban $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tekintsük az $\overline{x_i, x_j}$ $1 \leqq i < j \leqq n$ távolságokat. Jelölje $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ezen n pont közötti különböző távolságok számát és legyen

$$f(n) = \min_{x_1, x_2, \ldots, x_n} D(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Bebizonyítottam,[2] hogy

$$(n-1)^{1/2} - 1 < f(n) < c_1 \frac{n}{\sqrt{\log n}}. \tag{1}$$

A négyzetes síkrács példája mutatja, hogy

$$f(n) < c_1 \frac{n}{\sqrt{\log n}}.$$

MOSER[3] az alsó határt $\left(\frac{n^{2/3}}{2\sqrt[3]{9}} - 1\right)$-re javította. Biztosra vehető, hogy $f(n) > n^{1-\varepsilon}$ sőt, talán $f(n) > c_2 \frac{n}{\sqrt{\log n}}$. Moser tulajdonképpen azt bizonyítja be, hogy van egy oly pont, melytől számított távolságok között legalább $\frac{n^{2/3}}{2\sqrt[3]{9}} - 1$ különböző van. Talán ez is $c_3 \frac{n}{\sqrt{\log n}}$-re javítható. Általában jelentse $d(x_i)$ az x_i-től való különböző távol-

[1] l'Enseignement Math. (2). 1 (1955) 56—89.
[2] Amer. Math. Monthly 53 (1946) 248—251.
[3] Amer. Math. Monthly 59 (1852) 85—91.

ságok számát. Az előbbi sejtés $\max\limits_{1 \leqq i \leqq n} d(x_i) > c_3 \frac{n}{\sqrt{\log n}}$ alakba írható.

További probléma volna $\sum\limits_{i=1}^{n} d(x_i)$ megbecslése. Valószínűnek látszik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) > n^{2-\varepsilon} \tag{2}$$

$\left(\text{talán } c_4 \frac{n^2}{\sqrt{\log n}} \text{ is igaz}\right)$. Azonban csak annyit tudok bizonyítani, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) > \frac{1}{2} n^{3/2}. \tag{3}$$

Ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontok konvex poligont alkotnak, akkor valószínűnek látszik (2), hogy $f(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$ (egyenlőség a szabályos sokszög esetén).

MOSER[3] bebizonyította, hogy ez esetben $f(n) \geqq \left[\frac{n+2}{3}\right]$. Az is valószínűnek látszik (2), hogy van olyan x_i, melytől nincs három más x_i egyenlő távolságban $\left(\text{ebből persze következnék, hogy } f(n) = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$. A négyzetes síkrács példája mutatja, hogy megadható n pont a síkban úgy, hogy mindegyikhez van $n^{c_5/\log\log n}$ tőle egyenlő távolságban levő pont. Lehetséges azonban, hogy e határ pontos — azaz, ha adva van $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n pont a síkban, mindig van egy x_i, melytől nincs $n^{c_6/\log\log n}$ pont egyenlő távolságban. Bebizonyítani csak azt tudom, hogy van oly pont, melytől nincs $n^{2/3}+2$ pont egyenlő távolságban. Ez a következőképpen látható be: Tegyük fel, hogy x_i-től $g(x_i)$ pont van egyenlő távolságban ($1 \leqq i \leqq n$). Azaz van oly x_i középpontú kör, amelyen $g(x_i)$ pont van. Minthogy minden pontármas csak egy ily körön fekhetik, nyilván nyerjük, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{g(x_i)}{3} \leqq \binom{n}{3}$$

azaz, ha $\min\limits_{1 \leqq i \leqq n} g(x_i) = y$, $n\binom{y}{3} \leqq \binom{n}{3}$, tehát $y < n^{2/3}+2$ qu. e. d.

Ha az x_i pontok a k $(k>2)$ dimenziós térben vannak, akkor a rácspontok példája mutatja, hogy $f_k(n)<c_k n^{2/k}$ ($f_k(n)$ jelentése ugyanaz, mint $f(n)$-é, a k-dimenziós térben, ezek szerint $f(n)=f_2(n)$) és nincs kizárva, hogy ez már a helyes nagyságrend, tehát hogy $f_k(n)>c'_k n^{2/k}$. $k=1$ esetén, tehát ha a pontok egy egyenesen vannak, akkor nyilván $f_1(n)=n-1$.

A k dimenziós térben nyilván $f_k(k+1)=1$, de $f_k(k+2)=2$. KELLY kérdezte, mily nagynak kell l-nek lennie, hogy $f_k(l)>2$ legyen. Bebizonyítottam, hogy $l<k^c$ (c fix, de nem függ k-tól) l valódi nagyságrendje talán ck.

Adva van a síkban n pont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, melyeknek átmérője 1 (azaz $\max\limits_{1\leq i<j\leq n} \overline{x_i x_j}=1$). Könnyű bebizonyítani, hogy legfeljebb n pontpár van, melynek távolsága 1.[4] VÁZSONYI kb. 20 évvel ezelőtt sejtette, hogy a háromdimenziós térben legfeljebb $2n-2$ pontpár van, melyeknek távolsága 1 (könnyű belátni, hogy $2n-2$ elérhető). Néhány hónappal ezelőtt HEPPES (17), GRÜNBAUM (izraeli matematikus) és S. STRASZEVICZ (18) lengyel matematikus bebizonyították e sejtést. E kérdés összefügg BORSUK következő sejtésével: Minden k dimenziós egységnyi átmérőjű halmaz feldarabolható $k+1$ 1-nél kisebb átmérőjű halmazra. $k=1$-re ez triviális, $k=2$-re könnyű, $k=3$-ra néhány évvel ezelőtt EGGLESTON[5] egy komplikáltabb bizonyítást talált. Néhány hónappal ezelőtt GRÜNBAUM és HEPPES egy sokkal egyszerűbb bizonyítást találtak a $k=3$ esetre. $k>3$ esetén a sejtés még nincs eldöntve.

Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n pont a síkban. Tegyük fel, hogy

$$\min_{1\leq i<j\leq n} \overline{x_i x_j}=1.$$

Hány oly pontpár lehetséges, melyekre $\overline{x_i x_j}=1$? Könnyű belátni, hogy legfeljebb $3n$ ily pontpár van (2) és ugyancsak könnyű ezt $(3n-c_6 n^{1/2})$-re javítani (2). A háromszögrács példája viszont mutatja, hogy $(3n-c_7 n^{1/2})$ ily pontpár ténylegesen lehetséges. Valószínűnek látszik, hogy ha a pontok száma $3n^2+3n+1$, a legkisebb távolság maximális előfordulási száma $9n^2+3n$, s ez esetben a pontok egy n oldalhosszúságú szabályos hatszöget kitöltő háromszögrácsot alkotnak.

Általában az $\overline{x_i x_j}$ számok közül legfeljebb $[n^{3/2}]$ lehet egyenlő (2) — azaz ugyanaz a távolság legfeljebb $[n^{3/2}]$-szer fordulhat elő. Ez valószínűleg $n^{1+\varepsilon}$-ra javítható, talán $n^{1+c_8/\log\log n}$-re, de mint a négyzetes síkrács példája mutatja, ennél tovább már biztosan nem lesz javítható.

[4] Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung.
[5] Journal London Math. Soc. 30 (1955) 11—24.

Egy halmaz legyen T tulajdonságú, ha bármely két pontja közötti távolság különböző. Legyen adva n pont az egyenesen. Könnyű belátni, hogy mindig van egy $[n^{1/3}]$ pontból álló részhalmaza, mely T tulajdonságú. Ez talán $(1+o(1))n^{1/2}$-re javítható, de $(1+c)n^{1/2}$-re biztosan nem.[6] E kérdések a síkra és k-dimenziós térre is felvethetők, de csak annyit tudok bebizonyítani, hogy a k-dimenziós térben mindig van egy n pontból álló T tulajdonságú részhalmaz, c_k pontos értékét nem tudom meghatározni.

Legyen adva a k-dimenziós térben egy m számosságú (m végtelen) S halmaz. Akkor mindig van egy T tulajdonságú részhalmaza, mely szintén m számosságú[7] (a bizonyítás nem használja a Cantor-sejtést, mely szerint $2^{\aleph_0}=\aleph_1$). KAKUTANIval és OXTOBY-val kimutattuk, hogy Hilbert-térre ez nem igaz.[7] KAKUTANIval azt is kimutattuk,[8] hogy az egyenes felbomlik megszámlálhatóan sok T tulajdonságú halmaz összegére. Nem tudom, hogy ez a síkra is igaz-e.

Számos más, az előbbiekhez hasonló kérdés vethető még fel. Legyen például adva n pont a k-dimenziós térben; mi az ezen pontok által meghatározott egyenlő oldalú (egyenlő szárú) háromszögek maximális száma? $k=2$ és egyenlő oldalú háromszögek esetén a válasz nagyságrendje cn^2 lesz, de c pontos értékét nem ismerem.

Legyen adva n pont a k-dimenziós térben. Mekkora T tulajdonságú részhalmaza kell, hogy legyen? (Egy halmaz akkor T tulajdonságú, ha nem tartalmaz egyenlőszárú háromszöget.) E kérdés erőszakoltnak tűnik fel, azonban a látszat csal, ugyanis ha $k=1$ és a pontok ekvidisztánsak, akkor problémánk arra a jól ismert kérdésre redukálódik, hogy hány szám adható meg n-ig úgy, hogy ne forduljon elő háromtagú számtani sor.[9]

Bebizonyítottam, hogy ha a síkban adva van 7 pont, akkor mindig van közülük három, mely nem alkot egyenlőszárú háromszöget.[10] A szabályos ötszög és középpontja mutatja, hogy 6-ra ez nem igaz. Nem tudom, hogy a térben (vagy $k>3$ dimenzió esetén) mi a megfelelő eredmény.

[6] Erdős—Turán, Journal London Math. Soc. 16 (1941) 212—215. Kimutatjuk, hogy az ekvidisztans esetben sem javítható, lásd még ibid. 19 (1944) 208.

[7] Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) 127—141.

[8] Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943) 457—461.

[9] Az első cikk e kérdésről Erdős—Turán, Journal London Math. Soc. 11 (1936) 261—264. Lásd Turán cikkét a Középiskolai Mat. Lapokban. A jelenleg ismert legélesebb eredményeket Roth és Behrend érték el, Journal London Math. Soc. 29 (1954) 20—26, és Proc. Nat. Acad. Sci. USA 32 (1946) 331—332.

[10] Amer. Math. Monthly.

Igaz-e, hogy ha 2^k+1 pont van adva a k dimenziós térben, akkor mindig van közülük három, mely tompaszögű háromszöget alkot?[11] $k=2$-re ez triviális, $k=3$-ra ketten is bebizonyították a sejtést (nevükre nem emlékszem). Megadható-e a térben 7 pont úgy, hogy az összes keletkező háromszög hegyesszögű legyen?

2. GALLAI 1933-ban bebizonyította a következő tételt.[12] Legyen adva a síkban n pont, melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor mindig van oly egyenes, mely pontosan két ponton megy át. A kérdést SYLVESTER[13] vetette fel 1891-ben, de a problémát akkor senki sem oldotta meg s a kérdés feledésbe merült. 1933-ban SYLVESTER problémáját nem ismerve, a kérdést újból felvetettem s GALLAI bebizonyította. Megjegyezhetjük, hogy a tétel nem tisztán kombinatórikus, hanem lényeges, hogy a pontok a síkban vannak, így pl. ha $n=6k+1$ vagy $n=6k+3$, megadható a ternóknak egy oly rendszere, hogy minden ambo egy és csakis egy ternoban foglaltatik.[14] E kérdéseket MOTZKIN[15] is felvetette, és 1939-ben (GALLAItól függetlenül) A. ROBINSON is bebizonyította GALLAI tételét.

MOTZKINtól[15] származik továbbá a következő kérdés: Legyen adva a k-dimenziós térben n pont, melyek nincsenek mind egy $(k-1)$-dimenziós hipersíkon. Akkor e pontok legalább n $(k-1)$-dimenziós hipersíkot határoznak meg. E sejtés kétféleképpen értelmezhető. Első értelmezés geometriai, azaz az n pont egy k-dimenziós euklideszi térben van, a második mélyebb kombinatórikus értelmezés: hogy egy projektív k-dimenziós térben vannak a pontok. HANANI $k=2$ esetben a kombinatórikus kérdést megoldotta. Néhány évvel később e kérdéseket, Motzkin problémáját nem ismerve, $k=2$-re én újból felvetettem. A geometriai probléma $k=2$-re azonnal következik GALLAI tételéből. A kombinatórikus problémát $k=2$-re DE BRUIJN és én[16] és SZEKERES is megoldották. DE BRUIJNnel való módszerünket felhasználva MOTZKIN[15] a k-dimenziós kombinatórikus problémát megoldotta s így e kérdés teljes elintézést nyert.

Azonban talán még a következő, idetartozó geometriai és kombinatórikus kérdések felvethetők: Legyen adva n pont a síkban, melyek nincsenek mind egy körön. Rajzoljuk meg az összes legalább három ponton átmenő kört. A kérdés mármost az, hogy mi az így meghatározott körök minimális száma. A kérdés kombinató-

[11] Wiskundige Opgaven; lásd még Amer. Math. Monthly 55 (1945) 431.

[12] Amer. Math. Monthly 51 (1944) 170; lásd még Coxeter „The real projektive plane".

[13] Educational Times 59 (1893) 98, 11851-ik probléma.

[14] Netto, Kombinatorik. Lásd a Steinersche Dreier című fejezetet.

[15] Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951) 451—464.

rikus alakban is felvethető: legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n elem, $A_1, A_2, \ldots, A_t$ az a-kból alkotott kombinációk, minden $(a_i a_j a_l)$ terno egy és csakis egy A-ban foglaltatik, tegyük fel továbbá, hogy minden A legalább három elemet tartalmaz és hogy $t > 1$. Mi t minimális értéke? (Ha ternok helyett ambokat tekintünk, akkor e kérdés a HANANI által elintézett projektiv geometriai kérdéssel megegyezik.) E kérdésekkel HANANIval együtt sokat foglalkoztunk, de nem jutottunk eredményre. Itt persze egyáltalán nem biztos (sőt nem is valószínű), hogy a geometriai és a kombinatórikus kérdés ugyanarra az eredményre vezet. E kérdés persze ternok helyett k-ad osztályú kombinációkra is felvethető.

MOTZKINtól[15] való még a következő sejtés, mely GALLAI tételének általánositása: legyen adva n pont a k-dimenziós euklideszi térben, melyek nincsenek mind egy $(k-1)$-dimenziós hipersíkban. Akkor e pontok meghatároznak legalább egy oly $(k-1)$-dimenziós hipersíkot, melyeknek pontjai egy kivételével egy $(k-2)$-dimenziós hipersíkban vannak (azaz, ha $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ pontok), akkor ezek nincsenek mind egy $(k-2)$-dimenziós hipersíkban, de $x_{i_2}, \ldots, x_{i_l}$ már egy $(k-2)$-dimenziós hipersíkon vannak. $k=2$-re ez GALLAI tétele, MOTZKIN $k=3$-ra is bebizonyítja e sejtést, $k > 3$-ra a probléma még nincs megoldva.

MOTZKIN[15] megjegyzi, hogy GALLAI tételének általánosítása a háromdimenziós térre nem igaz: Legyen adva n pont, melyek nincsenek mind egy síkban, akkor van oly sík, mely pontosan három ponton megy át. Motzkin két ellenpéldát is ad. Az első ellenpéldában két kitérő egyenes mindegyiken van három vagy több pont, a második ellenpélda 10 pontból áll, melyet öt általános helyzetben levő sík metszéspontja határoz meg. Motzkin lehetségesnek tartja, hogy minden egyéb esetben van oly sík, mely pontosan három ponton megy át.

E gondolatkörből talán még a következő problémák említhetők meg: Legyen adva n pont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az euklidesi síkban, melyek nincsenek mind egy egyenesen. $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jelentse azon egyenesek számát, melyek pontosan két ponton mennek át és $V(u)$ legyen $V(x_1, \ldots, x_n)$ minimuma. GALLAI tétele szerint $V(u) \geqq 1$. DE BRUIJNnel sejtettük, hogy $V(u) \to \infty$, ha $u \to \infty$. DIRAC GÁBOR[16] bebizonyította, hogy $V(u) \geqq 4$ és MOTZKIN,[15] hogy $V(u) > c\sqrt{u}$ s ezzel sejtésünket igazolta. DIRAC[16] sejtette, hogy $V(u) \geqq \left[\frac{u}{2}\right]$. DIRAC[16] bebizonyította, hogy ha adva van n pont, melyek nincsenek

[16] Quarterly Journal of Math. II. (1951) 221—227.

mind egy egyenesen, akkor ezen pontok egyikéből legalább $[\sqrt{n}]$ különböző egyenes indul ki s sejti, hogy ez $\left[\frac{n}{2}\right]$-re javítható.

Legyen adva n pont az euklideszi síkban, melyek nincsenek mind egy egyenesen, amint már említettük, ez n pont legalább n egyenest határoz meg s egyenlőség csak akkor van, ha ezen n pont közül $n-1$ egy egyenesen van. Tegyük fel mármost, hogy n pont van a síkban, úgy, hogy nincs $n-1$ közülük egy egyenesen. Legalább hány egyenest határoznak meg e pontok? Azt lehetne gondolni, hogy $2n-4$ a válasz ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ a pontok (x_1, x_2, x_3), $(x_1, x_4, \ldots, x_n)$ egy egyenesen vannak), de 7 pontot meg lehet adni, melyek csak 9 egyenest határoznak meg, egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai, oldalainak felezőpontja s a háromszög középpontja. Lehetséges, hogy nagy n esetén mégis $2n-4$ a válasz.

Talán még érdemes lesz az olvasók figyelmét a következő kombinatórikus kérdésekre felhívni: Legyenek k és l adott számok. Milyen n mellett létezik az n elem l-elemű részhalmazainak egy oly osztálya, hogy k elemű részhalmaz egy és csakis egy l elemű részhalmazban foglaltatik. Nyilvánvalóan szükséges feltétel, hogy $\binom{n}{k} \equiv 0 \left(\mathrm{mod} \binom{l}{k}\right)$. Ismeretes, hogy $l=3$, $k=2$ esetén ez elégséges is[14], de egyetlen egy más k és l esetén sem ismeretes szükséges és elégséges feltétel. A legérdekesebb speciális eset, ha $n=m^2+m+1$, $l=m+1$, $k=2$. Ha $m=p^\alpha$, akkor ismeretes, hogy ily rendszer létezik, s egy jól ismert sejtés szerint, ha m nem ilyen alakú, ily rendszer nincs. E kérdés összefügg véges projektiv geometriákkal.

ON SOME GEOMETRICAL PROBLEMS

By P. Erdős

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ

П. Эрдёш

[17] Acta. Math. Ac. Sci. Hung. VIII. (1957) 1—2 sz.
[18] Bull. de l'Ac. Pol. des Sciences Classe III. V. (1957) 1. sz. 39. o.