SUR LA DÉCOMPOSITION DE L'ESPACE EUCLIDIEN EN ENSEMBLES HOMOGÈNES

Par

P. ERDŐS (Budapest), correspondant de l'Académie, et S. MARCUS (Bucarest)

1. Selon EMILE BOREL, un ensemble E de l'espace euclidien à n dimensions $\mathcal{E}^n$ est dit homogène si, X et Y étant deux points quelconques de E, la translation XY transforme E en lui-même.

Le continu et l'ensemble des nombres rationnels sont des exemples triviaux d'ensembles homogènes linéaires. EMILE BOREL construit [1] deux exemples d'ensembles linéaires, homogènes, non dénombrables, autres que le continu et conclut: „Les ensembles que nous avons définis sont de mesure nulle; la question reste ouverte de savoir si le continu peut être décomposé en un nombre fini ou en une infinité dénombrable d'ensembles homogènes égaux, qui ne pourraient être de mesure nulle si leur nombre est fini et ne seraient pas mesurables si leur infinité est dénombrable".

En ce qui concerne la décomposition de la droite en une infinité de puissance $\mathfrak{m}$ ($\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} \leqq 2^{\aleph_0}$) d'ensembles homogènes superposables par translation, le problème est résolu par l'affirmative (bien que non explicitement), par S. RUZIEWICZ [2] et I. HALPERIN [3].

I. HALPERIN démontre qu'il existe une décomposition de la droite en $\mathfrak{m}$ ($\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} \leqq 2^{\aleph_0}$) ensembles E_ι superposables par translation et saturément non mesurables (c'est-à-dire pour tout E mesurable on a $\mu^*(E_\iota \cap E) = \mu(E)$, $\mu_*(E_\iota \cap E) = 0$, μ^*, μ et μ_* étant, respectivement, la mesure extérieure, la mesure, la mesure intérieure). On peut montrer que les ensembles E_ι sont homogènes.

Les résultats contenus dans la présente Note peuvent être résumés comme il suit:

Il n'existe aucune décomposition de $\mathcal{E}^n$ en un nombre fini > 1 d'ensembles homogènes non vides. Le caractère saturé de la non mesurabilité (voir, par exemple, la décomposition de I. HALPERIN) est inévitable pour les ensembles de toute décomposition de $\mathcal{E}^n$ en une infinité de puissance $< 2^{\aleph_0}$ d'ensembles homogènes, non mesurables et superposables par translation (en particulier, pour la décomposition de S. RUZIEWICZ de [2], si $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$). Il existe une décomposition de $\mathcal{E}^n$ en $\mathfrak{m}$ ($\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} \leqq 2^{\aleph_0}$) ensembles homogènes, saturément non mesurables, superposables par translation et chacun d'eux contenant un ensemble parfait. On donne une démonstration du théorème de I. HALPERIN de [3]. On donne les analogues descriptifs (dans les termes de la catégorie de Baire) de certains de ces résultats.

2. Par *ensemble homogène non trivial* on comprendra dans la suite un ensemble linéaire, homogène, non dénombrable et autre que le continu linéaire.

LEMME 1. *Un ensemble homogène non trivial est un ensemble frontière partout dense.* (La démonstration est évidente.)

THÉORÈME 1. *Il n'existe aucune décomposition du continu linéaire en un nombre fini >1 d'ensembles disjoints homogènes et superposables par translation.*

DÉMONSTRATION. Soit, par absurde, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ une telle décomposition. On sait que la famille de tous les ensembles linéaires distincts, superposables par translation avec E_i, est infinie (théorème 1 de [4]). Il existe donc un ensemble F distinct de tout E_i $(i=1,2,\dots,n)$ et superposable par translation avec tout E_i. Mais, parce que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ épuise la droite, il existe un E_j $(1 \leqq j \leqq n)$ tel que $E_j \cap F \neq 0$ et $F - E_j \neq 0$. D'autre part, du fait que E_j est homogène, il résulte ou bien $E_j \cap F = 0$ ou bien $F = E_j$.

La contradiction obtenue achève la démonstration.

REMARQUE. Le cas particulier suivant du théorème 1 est démontré en [5]: *Il n'existe aucune décomposition du continu linéaire en deux ensembles non vides, disjoints et homogènes.** Nous en donnons ici deux autres démonstrations.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION: Admettons qu'une telle décomposition existe. Un au moins des deux ensembles E et F de la décomposition est non trivial. D'après le lemme 1, E et F sont partout denses, donc $f(x)$, la fonction caractéristique de E, est discontinue en chaque point. D'autre part, on voit aisément que $f(x)$ est symétriquement continue en chaque point, c'est-à-dire, pour un x quelconque, on a

$$\lim_{h\to 0} (f(x+h) - f(x-h)) = 0.$$

Mais cela contredit le théorème de [6], qui affirme que, si une fonction est symétriquement continue en chaque point, ses points de discontinuité forment un ensemble de première catégorie.

DEUXIÈME DÉMONSTRATION. En désignant par $D(A)$ l'ensemble des distances de l'ensemble A, on a, en tenant compte que E et F devraient être

* Il est aisé de voir que, s'il existait une telle décomposition, les deux ensembles de la décomposition seraient superposables par translation.

superposables par translation,

$$D(E)=D(F) \tag{1}$$

D'autre part on a l'implication

$$\delta \notin D(E) \Longrightarrow 2\delta \in D(F). \tag{2}$$

Supposons que $0 \in E$; on a donc $D(E)=E$ et, d'après le lemme 1, il existe un $\omega \notin D(E)$. Si l'on a $\omega/2 \in D(E)$, alors, vu l'homogénéité de E, on a aussi $\omega \in D(E)$, ce qui est contradictoire. Si l'on a $\omega/2 \notin D(E)$, alors, d'après (2), on a $\omega \in D(F)$ et, en tenant compte de (1), on a $\omega \in D(E)$, donc de nouveau la même contradiction est établie.

Le théorème 1 donne la réponse négative à la question posée par BOREL sur l'existence d'une décomposition finie de la droite en ensembles homogènes superposables par translation. Mais il est intéressant de savoir si la réponse est aussi négative même quand on renonce à la restriction que les ensembles soient superposables par translation. Nous allons résoudre ce problème, en utilisant le théorème 1.

3. S. BANACH a démontré [7] qu'il existe une fonction d'ensemble non négative, simplement additive, définie pour tout ensemble borné de la droite, telle que pour deux ensembles congruents la fonction prend la même valeur et telle encore que la valeur de la fonction, pour tout ensemble borné mesurable au sens de Lebesgue, est justement la mesure de Lebesgue de cet ensemble.

Nous appelons cette fonction *mesure de Banach* et nous la désignons par ν.

LEMME 2. *Si A est un ensemble homogène non trivial, alors on a $\nu(A \cap (0,1))=0$.*

DÉMONSTRATION. On peut admettre que $0 \in A$. Il existe, en tenant compte du lemme 1, un nombre réel positif k_1 tel que $1 > k_1 \notin A$. Désignons par A_1 l'ensemble des points de la forme $x+k_1$ où $x \in A$. A_1 est homogène et $A \cap A_1 = 0$. En vertu du théorème 1, $A \cup A_1$ n'épuise pas la droite. Si $k_2 \notin A \cup A_1$, alors l'ensemble A_2 des points de la forme $x+k_2$, où $x \in A$, est homogène non trivial. En vertu du lemme 1, on peut supposer que $0 < k_2 < 1$. Maintenant nous répétons le même raisonnement. S'il existait un nombre entier positif n, tel que $A \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$ épuise la droite, alors il serait contradictoire au théorème 1. Donc il existe une suite $k_1, k_2, \ldots$ telle que les ensembles $A_1, A_2, \ldots$ sont disjoints et superposables par translation avec A.

Posons $A^* = A \cap (0,1)$ et désignons par A^*_n l'ensemble des points $x+k$ où $x \in A^*$. Si l'on avait $\nu(A^*)=\omega>0$, alors pour tout n

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A^*_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \nu(A^*_i)=n\,\omega$$

et puisque pour tout n on a $A_n^* \subset (0, 2)$ et en tenant compte que la mesure de Banach est non négative, il résulte, pour tout n, $n\omega < 2$, ce qui est absurde. Donc $\nu(A^*) = 0$.

REMARQUE. Du lemme 2 il résulte que tout ensemble homogène non trivial, mesurable au sens de Lebesgue, est de mesure nulle (ce qui explique pourquoi était il nécessaire que les ensembles homogènes construits par BOREL, sans l'axiome du choix, soient de mesure nulle). On peut établir un résultat plus général: *Tout ensemble E homogène non trivial est de mesure intérieure nulle.* En effet, s'il n'était ainsi, l'ensemble $D(E)$ contiendrait un intervalle [8], donc, vu l'homogénéité de E, E aussi contiendrait un intervalle chose impossible à cause du lemme 1.

On a aussi: *Tout ensemble jouissant de la propriété de Baire, contenu dans un ensemble homogène non trivial, est de première catégorie.*

THÉORÈME 2. *Il n'existe aucune décomposition de la droite en un nombre fini > 1 d'ensembles homogènes disjoints et non vides.*

DÉMONSTRATION. Supposons, par réduction à l'absurde, qu'une telle décomposition $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ existe. Pour tout $1 \leqq i \leqq n$ tel que E_i est non trivial on a, d'après le lemme 2, $\nu(E_i \cap (0, 1)) = 0$. D'autre part, un E_i trivial est dénombrable, donc de mesure nulle au sens de Lebesgue, donc aussi de mesure nulle au sens de Banach. On a donc aussi $\nu(E_i \cap (0, 1)) = 0$. En vertu de l'additivité simple de ν, on a $\nu((0, 1)) = 0$, ce qui est contradictoire.

REMARQUE. Le théorème sur l'existence de la mesure de Banach, utilisé dans la démonstration du théorème 2, cesse d'être vrai dans un espace euclidien de dimension supérieure à deux [9]. Cependant, il est remarquable que le théorème 2 est vrai pour un espace euclidien de dimension quelconque, comme le montre le suivant

COROLLAIRE. *Il n'existe aucune décomposition de $\mathcal{E}^n$ en un nombre fini $p > 1$ d'ensembles homogènes, disjoints et non vides.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire et soit $\mathcal{E}^n = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_p$ $(p > 1)$ une telle décomposition. Il est facile de voir qu'il existe une droite $D \subset \mathcal{E}^n$ telle que, quel que soit i $(1 \leqq i \leqq p)$, $E_i \cap D$ n'épuise pas D.

En effet, dans le cas contraire on aurait, pour toute droite D, un certain ensemble E_j $(1 \leqq j \leqq n)$ tel que $D \subset E_j$. Mais alors, P étant un point quelconque et E_k $(1 \leqq k \leqq p)$ étant tel que $P \in E_k$, on aurait, pour toute droite D passant par P, $D \subset E_k$, donc $\mathcal{E}^n$ serait épuisé par E_k, contrairement à l'hypothèse $p > 1$.

Remarquons maintenant que chaque $E_i \cap D$ $(1 \leqq i \leqq p)$ est aussi un ensemble homogène. On obtient donc une décomposition de D en un nombre fini > 1 d'ensembles homogènes disjoints et non vides, chose interdite par le théorème 2.

REMARQUE. Il serait intéressant de trouver, pour le théorème 2 et son corollaire, une démonstration directe (donc qui n'utilise pas la mesure de Banach).

4. Il est aisé de voir que les niveaux d'une fonction additive sont des ensembles homogènes superposables par translation. En tenant compte alors d'un théorème de I. HALPERIN [3], on a la

PROPOSITION H. *Quel que soit le nombre cardinal* $\mathfrak{m}$ *tel que* $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} \leqq 2^{\aleph_0}$, *il existe une décomposition de la droite en* $\mathfrak{m}$ *ensembles homogènes, non triviaux, disjoints, superposables par translation et chacun d'eux rencontrant tout ensemble mesurable* E *suivant un ensemble de mesure extérieure égale à la mesure de* E.

S. RUZIEWICZ a démontré le théorème suivant [2]: Quel que soit le cardinal $\mathfrak{m}$ tel que $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} \leqq 2^{\aleph_0}$, il existe une décomposition de la droite en $\mathfrak{m}$ ensembles disjoints, non mesurables et superposables par translation.

Ce théorème est plus faible que celui de I. HALPERIN, qui affirme en plus que chaque ensemble de la décomposition rencontre tout ensemble mesurable E suivant un ensemble de mesure extérieure égale à la mesure de E. La Proposition H contient comme cas particuliers non seulement le théorème de S. RUZIEWICZ, mais aussi ceux de N. LUSIN et W. SIERPINSKI [10], H. HAHN et A. ROSENTHAL [11], C. BURSTIN [12], [13] et O. RINDUNG [14].

Nous allons donner un théorème qui montre, entre autres, que pour $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ la décomposition de S. RUZIEWICZ possède toutes les propriétés de la décomposition de I. HALPERIN.

THÉORÈME 3. *Si* $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ *et si* $\bigcup E_\iota$ *est une décomposition de la droite en* $\mathfrak{m}$ *ensembles disjoints, homogènes, superposables par translation et non mesurables au sens de Lebesgue (resp. dépourvus de la propriété de Baire), alors pour tout ensemble mesurable (resp. jouissant de la propriété de Baire)* E, *on a* $\mu^*(E_\iota \cap E) = \mu(E)$ *(resp. chaque ensemble* F *jouissant de la propriété de Baire et contenu dans* $E - E_\iota$ *est de première catégorie), quel que soit* ι.

DÉMONSTRATION. En vertu de l'homogénéité des ensembles E_ι, il existent seulement $\mathfrak{m}$ ensembles distincts superposables par translation avec un certain E_ι. Si E_ι est non mesurable, alors un théorème de W. SIERPINSKI (théorème 3 de [4]) affirme que pour tout intervalle I on a $\mu^*(E_\iota \cap I) = \mu(I)$. Cela étant vrai pour tout E_ι, on a pour tout E_ι et pour tout E mesurable $\mu^*(E_\iota \cap E) = \mu(E)$.

Si E_t est dépourvu de la propriété de Baire, alors, en désignant par $E_t(t)$ l'ensemble qui s'obtient de E_t par une translation égale à t, on remarque que, pour une suite $\{t_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ dense sur la droite, l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_t(t_n)$ est de deuxième catégorie de Baire dans chaque intervalle. On parvient ainsi à un analogue descriptif du théorème 3 de [4], analogue qui permet d'accomplir la démonstration de notre théorème dans le cas descriptif aussi.

Un ensemble homogène de la décomposition de I. HALPERIN ne contient aucun ensemble parfait non vide. Il se montre intéressant alors le

THÉORÈME 4. *Si* $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} \leqq 2^{\aleph_0}$, *il existe une décomposition de la droite en* $\mathfrak{m}$ *ensembles homogènes, disjoints, superposables par translation et tels que chacun d'eux contient un ensemble parfait non vide.*

DÉMONSTRATION. Soit B une base de Hamel qui contient un ensemble parfait P. (L'existence d'une telle base a été démontré par F. B. JONES [15].) Soient P_1 et R_1 deux sousensembles parfaits et disjoints de P. Soit $B = M_1 \cup N_1$, où $P_1 \subset M_1$, $R_1 \subset N_1$, $M_1 \cap N_1 = 0$. On a donc $\overline{\overline{M}}_1 = \overline{\overline{N}}_1 = 2^{\aleph_0}$. Il existe donc $M \subset M_1$ avec $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$.

Posons $N = N_1 \cup (M_1 - M)$. On a $B = M \cup N$. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in M, \\ 0 & \text{si } x \in N, \end{cases}$$

et définie par le procédé de HAMEL pour $x \notin B$.

Il est aisé de voir que les ensembles de niveau de $f(x)$ fournissent la décomposition cherchée.

REMARQUE. Pour $\mathfrak{m} = \aleph_0$, on a, pour chaque ensemble E_t de la décomposition et pour chaque ensemble mesurable E, $\mu^*(E_t \cap E) = \mu(E)$. Peut-on satisfaire à cette condition, dans le théorème 4, pour $\mathfrak{m} > \aleph_0$? Une réponse affirmative à cette question est donnée par le théorème 5 ci-dessous. Mais d'abord un lemme.

On dit qu'un ensemble A est *rationnellement indépendant* si, pour chaque partie finie $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de A, l'égalité $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = 0$, où r_i sont rationnels, entraîne $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$.

LEMME 3. *Il existe un ensemble* T *parfait, non vide, rationnellement independant, tel que l'ensemble de tous les nombres de la forme* $\sum_k r_k x_k$ *(somme finie), où* r_k *sont rationnels et* $x_k \in T$, *est de mesure nulle.*

Nous allons donner deux démonstrations de ce lemme. La première fournit une construction explicite, tandis que la deuxième prouve seulement l'existence de l'ensemble en cause.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION. Soit A_t la suite dont le n-ième terme est $2^n+[n^t]$ $(0 \leqq t < \infty)$ où $[x]$ désigne la partie entière de x. Il est aisé de voir que, pour $t_1 \neq t_2$, l'ensemble $A_{t_1} \cap A_{t_2}$ est fini. Posons

$$\alpha_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k!}$$

où $\varepsilon_k = 1$ si $k \in A_t$ et $\varepsilon_k = 0$ si $k \notin A_t$. L'ensemble formé de tous les α_t, pour $0 \leqq t < \infty$, satisfait les conditions du lemme 3.

DEUXIÈME DÉMONSTRATION. Désignons, pour chaque ensemble X, par $R(X)$ l'ensemble de tous les nombres de la forme $\sum\limits_k r_k x_k$ (somme finie) où r_k sont rationnels et $x_k \in X$. D'après un résultat de W. SIERPINSKI [16], pour chaque X analytique au sens de LUSIN—SOUSLIN, $R(X)$ est aussi un ensemble analytique, donc mesurable.

Soit maintenant un ensemble parfait Π contenu dans une base de Hamel H. Π est rationnellement indépendant. D'autre part, Π contient une famille indénombrable $\{\Pi_t\}$ d'ensembles parfaits, disjoints et non vides [17]. Si Π_1 et Π_2 sont deux ensembles parfaits et disjoints contenus dans Π, alors, en tenant compte que $\Pi \subset H$, les ensembles $R(\Pi_1)$ et $R(\Pi_2)$ sont aussi disjoints.

En vertu du résultat de W. SIERPINSKI, chaque ensemble $R(\Pi_t)$ est mesurable. La famille $\{R(\Pi_t)\}$ étant indénombrable et formée d'ensembles disjoints et mesurables, contient au moins un ensemble $R(\Pi_\zeta)$ de mesure nulle. L'ensemble $T = \Pi_\zeta$ répond aux conditions du lemme.

THÉORÈME 5. *Si* $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} \leqq 2^{\aleph_0}$, *alors il existe une décomposition* $\bigcup\limits_t E_t$ *de la droite en* $\mathfrak{m}$ *ensembles homogènes, disjoints, superposables par translation, tels que chaque* E_t *contient un ensemble parfait non vide et pour chaque ensemble mesurable* E *on a* $\mu^*(E_t \cap E) = \mu(E)$.

DÉMONSTRATION. Soit Ω_0 le plus petit ordinal qui correspond à la puissance du continu. Soit

$$P_1, P_2, \ldots, P_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega_0)$$

une suite du type Ω_0, formée par tous les ensembles parfaits linéaires, de mesure positive.

En vertu des propriétés de l'ensemble T du lemme 3, il existe une base de Hamel $\mathcal{H}$ telle que

1° $\mathcal{H} \supset T$;

2° $\mathcal{H}$ contient, de chaque P_ξ, au moins deux points qui n'appartiennent pas à T.

$\mathcal{H}$ peut être écrite sous la forme $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ où $S_i \cap S_j = 0$ si $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ et où $S_1 = T$, S_2 rencontre tout ensemble parfait de mesure positive et S_3 a la puissance $\mathfrak{m}$. Il est visible que pour tout ensemble mesurable E on a $\mu^*(S_2 \cap E) = \mu(E)$.

Désignons par Λ l'ensemble de tous les nombres de la forme $\sum_k r_k x_k$ (somme finie) où r_k sont rationnels et $x_k \in S_1 \cup S_2$. Désignons par $\Lambda + k$ l'ensemble qui s'obtient de Λ par la translation de longueur k. Si z_ι parcourt l'ensemble des nombres de la forme $\sum_k r_k x_k$ (somme finie), où r_k sont rationnels et $x_k \in S_3$, alors $\bigcup_\iota E_\iota$, où $E_\iota = \Lambda + z_\iota$, est une décomposition de la droite qui satisfait toutes les conditions du théorème.

Nous avons remarqué ci-dessus que la *Proposition H* est plus forte que le théorème de S. Ruziewicz. Mais du théorème 3 il résulte, au moins dans le cas $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, que cela n'est qu'une apparence. Nous allons montrer maintenant qu'une certaine modification du procédé de S. Ruziewicz fournit pour la Proposition H une démonstration semblable à celle donnée par I. Halperin.

Démonstration de la Proposition H. Soit B une base de Hamel qui rencontre tout ensemble parfait. (L'existence d'une telle base a été démontré par C. Burstin [13].) On sait [17] qu'un ensemble parfait non vide contient une infinité de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles parfaits disjoints et non vides. Il en résulte que B a en commun avec tout ensemble parfait un ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$.

Soit Ω_0 le plus petit ordinal qui correspond à la puissance $2^{\aleph_0}$. Rangeons les ensembles parfaits de la droite dans une suite $\{P_\alpha\}$ du type Ω_0. Définissons, par induction, pour chaque α $(1 \leqq \alpha < \Omega_0)$ deux éléments $a_\alpha \in P_\alpha$, $b_\alpha \in P_\alpha$ tels que $a_\alpha \in B$, $b_\alpha \in B$ et $a_\alpha \neq a_\beta, b_\beta$, $b_\alpha \neq a_\beta, b_\beta$ pour tout $\beta < \alpha$. Désignons par M_1 l'ensemble des éléments a_α $(1 \leqq \alpha < \Omega_0)$ et posons $N_1 = B - M_1$. Il est visible que M_1 et N_1 rencontrent tout ensemble parfait, donc, pour tout E mesurable, on a $\mu^*(M_1 \cap E) = \mu^*(N_1 \cap E) = \mu(E)$. Soit $\mathfrak{m}$ tel que $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} \leqq 2^{\aleph_0}$ et soit $M \subset M_1$ tel que $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in M, \\ 0 \text{ si } x \in N_1 \cup (M_1 - M), \\ \sum r_i f(x_i) \text{ si } x \notin B, \end{cases}$$

où $x = \Sigma r_i x_i$ est la représentation de x à l'aide de la base B (r_i sont rationnels, $x_i \in B$).

Les ensembles de niveau de $f(x)$ fournissent la décomposition cherchée.

L'extension à l'espace $\mathcal{E}^n$. Pour l'extension de la Proposition H et des théorèmes 4 et 5 à l'espace $\mathcal{E}^n$ $(n > 1)$, il suffit de remarquer que toute fonction additive, de n variables, est une somme de n fonctions additives d'une seule variable et que les ensembles de niveau d'une fonction additive de n variables sont homogènes et superposables par translation.

Quant au théorème 3, il est aussi vrai dans $\mathcal{E}^n$, car tout ensemble homogène, non mesurable de $\mathcal{E}^n$ est dense partout dans $\mathcal{E}^n$. Du reste, la démonstration se réduit au cas linéaire.

Remarquons enfin qu'il est facile de voir, en partant d'une base de Hamel dépourvue de la propriété de Baire (la base de Burstin est une telle base), que la démonstration ci-dessus de la Proposition H conduit aussi à une proposition analogue de nature descriptive que nous nous dispensons de formuler.

(Reçu le 29 juillet 1957.)

Ouvrages cités

[1] E. Borel, Les ensembles homogènes, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), p. 617—618.

[2] S. Ruziewicz, Une application de l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$ à la décomposition de la droite en ensembles superposables, non mesurables, *Fund. Math.*, **5** (1924), p. 92—95.

[3] I. Halperin, Non-measurable sets and the equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), p. 221—224.

[4] W. Sierpinski, Sur les translations des ensembles linéaires, *Fund. Math.*, **35** (1948), p. 159—164.

[5] S. Piccard, *Sur les ensembles des distances des ensembles de points d'un espace euclidien* (Neuchatel, 1939), p. 78.

[6] H. Fried, Über die symmetrische Stetigkeit von Funktionen, *Fund. Math.*, **29** (1937), p. 134—137.

[7] S. Banach, Sur le problème de la mesure, *Fund. Math.*, **4** (1923), p. 30.

[8] H. Steinhaus, Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, *Fund. Math.*, **1** (1920), p. 99.

[9] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914), p. 469.

[10] N. Lusin et W. Sierpinski, Sur une décomposition du continu en une infinité non dénombrable d'ensembles non mesurables, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **165** (1917), p. 422—424.

[11] H. Hahn and A. Rosenthal, *Set functions* (New Mexico, 1948), p. 102—104.

[12] C. Burstin, Die Spaltung des Kontinuums in $\aleph_1$ überall dichte Mengen, *Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien*, **124** (1915).

13] C. Burstin, Die Spaltung des Kontinuums in c im L. Sinne nichtmeßbare Mengen, *ibid.*, **125** (1916).

[14] O. Rindung, A proof of the possibility of dividing the real numbers into more than countably many disjoint and congruent sets with positive outer Lebesgue measure, *Math. Tidsskr.*, **16—17**, (1950).

[15] F. B. Jones, Measure and other properties of a Hamel basis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), p. 472—481.

[16] W. Sierpinski, Sur la question de la mesurabilité de la base de Hamel, *Fund. Math.*, **1** (1920), p. 109—111.

[17] C. Kuratowski et W. Sierpinski, Sur un problème de M. Fréchét concernant les dimensions des ensembles, *Fund. Math.*, **8** (1926), p. 195 (démonstration du lemme 2).