KÜLÖNLENYOMAT

MATEMATIKAI LAPOK

IX. ÉVFOLYAM 1—2. SZÁMÁBÓL

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULA
BUDAPEST, 1958

Konvex, zárt síkgörbék megközelítéséről

ERDŐS PÁL és VINCZE ISTVÁN

Bevezetés

Az alábbiakban a konvex görbék elméletének egyszerű fogalmai köré csoportosuló néhány — részben ismert — eredményt foglalunk össze. Ezek a fogalmak és eredmények a görbét lefedő, s azt különböző értelemben legjobban közelítő körrel, körgyűrűvel, ellipszissel, illetve több fókuszú ellipszisekkel kapcsolatosak.* Az ismert eredményekre nézve irodalmi hivatkozást adunk; igen egyszerű bizonyítás adódik a minimál-körgyűrű unicitására, amely Lebesgue egy megjegyzésére támaszkodik. Ennek a bizonyításnak gondolatmenetét átvisszük a görbét lefedő, s attól minimális távolságra eső ellipszis unicitásának bizonyítására. VÁZSONYI ENDRE vetette fel azt a kérdést, hogy valamely konvex, zárt síkgörbe tetszőlegesen approximálható-e többfókuszú ellipszisekkel, ha a fókuszok száma elég nagy. E kérdést meglepő módon tagadó értelemben válaszoljuk meg, amennyiben bebizonyítjuk, hogy egy egyenlőoldalú háromszög nem közelíthető meg tetszőlegesen többfókoszú ellipszisekkel. Példát adunk viszont olyan zárt síkgörbére, amely tartalmaz egy egyenesszakaszt, és amely tetszőlegesen közelíthető pl. 3 fókuszú ellipszisekkel. Nyitott kérdés azonban, hogy létezik-e korlátos, zárt konvex görbe, amely két egyenesszakaszt tartalmaz, és amely tetszőlegesen megközelíthető többfókuszú ellipszisekkel.

Az ismertetett eredményekkel kapcsolatban néhány más nyitott problémára is felhívjuk a figyelmet.

Végül köszönettel említjük meg, hogy a minimál-körgyűrű és fedő-ellipszisek kérdéskörére FEJÉR LIPÓT professzor úr hívta fel a figyelmet.

* n-fókuszú ellipszis alatt a sík ama pontjait értjük, amelyeknek adott n számú ponttól vett távolságaik összege állandó.

1. A legkisebb sugarú fedőkör

Jelöljünk G-vel valamely konvex, zárt síkgörbét és T-vel az általa határolt zárt tartományt. G konvexitásán szokásos módon azt értjük, hogy a T ponthalmaz bármely két pontjával együtt e két pont összekötő szakaszának minden pontját tartalmazza. A T tartomány két változó pontjának maximális távolsága a görbe átmérője, amelyet a továbbiakban D-vel jelölünk. Ismeretes, hogy valamely konvex görbe bármely pontjához húzható legalább egy támaszegyenes, vagyis olyan egyenes, amelynek a görbe teljesen egyik oldalára esik; egy háromszög csúcsához pl. több támaszegyenes is tartozik. Valamely adott irányra merőlegesen pontosan két támaszegyenes húzható, amelyek a görbét közrefogják. A párhuzamos támaszegyenesek maximális távolsága éppen D; minimális távolságuk, amelyet d-vel jelölünk, a görbe *szélessége.*

Beszélünk egy tetszőleges korlátos ponthalmaz átmérőjéről is, amely e ponthalmaz két változó pontja távolságának felső határa. Ez az átmérő megegyezik az illető ponthalmaz konvex burkának átmérőjével. Valamely ponthalmaz konvex burka az a legkisebb konvex tartomány, amely e halmaz minden pontját tartalmazza. A konvex burok megegyezik mindama félsík közös részével, amely félsíkok a görbét tartalmazzák.

Tekintsük most a sík mindazon köreit, amelyek G-t lefedik: tehát G pontjait belsejükben vagy kerületükön tartalmazzák. H. JUNG nevét viseli az az egyszerű és szép tétel, mely szerint a *G-t lefedő körök közül csak egy bír minimális sugárral.* A tételt JUNG véges pontsokaságra mondotta ki, míg ebben az általánosságban először SZŐKEFALVI-NAGY GYULA [8] bizonyította be.

Ilyen kör létezése egyszerűen adódik abból, hogy e sugarak hossza zárt, alulról korlátos számhalmazt alkot (egyikük sem lehet kisebb $D/2$-nél). — Ha viszont feltennők, hogy két minimális sugarú fedőkör volna, akkor az ezek által alkotott körkétszög is teljesen lefedné G-t; márpedig e körkétszög nyilván lefedhető a két minimális körnél kisebb körrel, ami lehetetlen.

E minimális fedőkör középpontja a kerületre is eshet, amint azt egy tompaszögű háromszög vagy félkör példái mutatják. A minimális fedőkör a következő módon jellemezhető: az egyetlen olyan, a G-t tartalmazó kör, amelyeknek a G görbével vagy két diametrálisan szembenfekvő közös pontja van, vagy pedig három olyan közös pontja, amelyek nem fekszenek a kör egy félkörnél kisebb ívén sem.

Adott átmérőjű görbe legkisebb fedőkörének sugara mindenesetre nem kisebb a D átmérő felénél, azonban ehhez képest nem lehet akármilyen nagy, ugyanis a következő pontos egyenlőtlenség áll fenn:

$$\frac{1}{2}D \leqq R_u \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}D,$$

ahol R_u-val a legkisebb fedőkör sugarát jelöltük. Ez a tétel is H. JUNG és SZŐKEFALVI-NAGY GYULÁtól származik [8].

Végül megjegyezzük, hogy a minimális fedőkörről itt mondottak érvényesek a sík akármely korlátos zárt halmazára, tehát speciálisan nem konvex zárt görbére is.

2. A legnagyobb sugarú beírható kör

A görbe belsejébe általában több kör írható legnagyobb sugárral. Ezt mutatja valamely téglalap esete is. Mindenesetre igaz az, hogy ha valamely konvex zárt görbéhez több maximális sugarú beírható kör létezik, akkor ezek sugarai egy zárt egyenesszakaszt alkotnak.

A legnagyobb beírható kör a következőképpen jellemezhető: a G konvex zárt görbébe írható olyan kör, amelynek a G görbével vagy két diametrálisan szembenfekvő közös pontja van, vagy pedig három olyan közös pontja, amelyek nem fekszenek a kör egyetlen félkörnél kisebb ívén sem.

A legnagyobb beírható kör sugara mindenesetre nem nagyobb mint a görbe d szélességének fele, azonban ettől függően nem lehet akármilyen kicsi, a következő egyenlőtlenség szerint:

$$\frac{1}{3}d \leqq r_i \leqq \frac{1}{2}d$$

ahol r_i-vel a legnagyobb beírható kör sugarát jelöltük (lásd pl. 5. 46. old).

3. A görbét tartalmazó legkeskenyebb körgyűrű (Minimál-körgyűrű)

Tekintsük a T tartomány valamely P pontját és rajzoljuk meg a P köré írható legkisebb sugarú, a G görbét tartalmazó kört, valamint a legnagyobb sugarú, G-be írható kört. Ilymódon a P pont köré írható legkeskenyebb (koncentrikus) körgyűrűt nyerjük, amely G-t tartalmazza. BONNESEN [3] és KRITIKOS [6] bebizonyították, hogy *a T tartomány P pontjai közül egy és csakis egy* *létezik, amelyre mint középpontra nézve az ilymódon képezhető legkeskenyebb körgyűrű szélessége a lehető legkisebb.* Nevezzük ezt a G-hez tartozó minimál-körgyűrűnek. E tételnek több bizonyítása ismeretes; LEBESGUE egy megjegyzése alapján (l. LEBESGUE [7]) e tétel bizonyitását a minimális fedőkörre vonatkozó — előbb ismertetett — JUNG-féle bizonyítás gondolatmenetére sikerül egyszerűsíteni (1. 5. §).

A minimál-körgyűrű geometriai jellemzésére BONNESEN a következő tételt adta:

A G görbét tartalmazó körgyűrűk közül egy és csakis egy létezik olyan tulajdonsággal, hogy G-nek legalább négy olyan pontja van, amelyek közül kettő a külső, kettő a belső körre esik, és e két-két pont a G-n egymást elválasztja.

A minimál-körgyűrű külső körének R sugara nyilván nem lehet kisebb a minimális fedőkör R_u sugaránál, de felső határt szab rá a következő egyenlőtlenség, amelyben mindkét határ elérhető (1. 9):

$$R_u \leqq R \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} R_u = 1{,}154\ldots R_u.$$

A minimál-körgyűrű belső körének r sugarára a következő pontos egyenlőtlenség áll, ahol az alsó határ el nem érhető, de tetszőlegesen megközelíthető (1. 9):

$$\frac{1}{2} r_i < r \leqq r_i.$$

E két egyenlőtlenség összefoglalása a minimál-körgyűrű szélességére a következő határokat adja:

$$R_u - r_i \leqq R - r < \frac{2}{\sqrt{3}} R_u - \frac{1}{2} r_i.$$

Az alsó határ itt elérhető mindazon esetben, amikor a minimális fedőkör középpontja összeesik valamelyik legnagyobb beírható kör középpontjával. A felső határ azonban nem pontos, mert R a $\frac{2}{\sqrt{3}} R_u$ legnagyobb értékét más görbénél veszi fel, mint aminél r az $\frac{1}{2} r_i$ legkisebb értékét megközelíti. Nyitott kérdés, hogy hogyan adható meg a minimál-körgyűrű szélességére elérhető vagy tetszőlegesen megközelíthető felső határ, ha az R_u és r_i-n kívül még más jellemző mennyiségeket (pl. a legnagyobb be-írt kör és legkisebb fedőkör középpontjainak távolságát) is figyelembe veszünk.

Végül megjegyezzük, hogy a minimál-körgyűrű itt használt értelmezésénél lényeges szerepet játszik az, hogy ennek középpontja a görbe *belsejébe* esik. Ennek az unicitás miatt van jelentősége. Tekintsünk ugyanis egy ellipszist, amelynek fél nagytengelye 5, fél kistengelye 1. A mondott értelemben ennek minimál-körgyűrűje 4 szélességű. Ha azonban a kistengely meghosszabbításán eléggé messze haladunk, akkor találunk olyan pontot (s minden távolabbi pont is ilyen), amely köré írhatunk 2 szélességű — az ellipszist tartalmazó — körgyűrűt. Ilymódon mind a minimáltulajdonság, mind az unicitás a T tartomány pontjaira vonatkoztatva érvényes.

A minimál-körgyűrű unicitásának bizonyításához néhány igen egyszerű fogalmat ismertetünk, amelyeket a görbék elméletében igen gyakran és eredményesen szoktak felhasználni.

4. Két görbe távolsága, paralelgörbe

Egy P pontnak valamely G zárt görbétől való távolságán a P pontnak a görbe pontjaitól vett minimális $E(P, G)$ távolságát értjük. Vagyis

$$E(P, G) = \min_{Q \in G} \overline{PQ}.$$

Tekintsük most a G és G' zárt görbéket és vegyük a G görbe pontjainak G'-től vett távolságai közül a legnagyobbat; legyen ez δ, vagyis

$$\delta = \max_{P \in G} E(P, G').$$

Legyen hasonlóképpen δ' a G' pontjainak G-től vett távolságainak legnagyobbika

$$\delta' = \max_{P' \in G'} E(P', G).$$

Ekkor a G és G' görbék $E(G, G') = E(G', G)$ távolságán értjük a δ és δ' távolságok közül a nagyobbikat.

Legyen most a G zárt görbe konvex és P a sík valamely pontja. Ha Q a G-nek olyan pontja, amelyre

$$E(P, G) = \overline{PQ},$$

akkor a $\overline{PQ}$ szakasz merőleges G-re abban az értelemben, hogy *a $\overline{PQ}$-ra a Q-ban húzott „e" merőleges támaszegyenese a görbének.*

Ennek bizonyítására vegyük először azt az esetet, amikor P a G görbe külsejébe esik. Ha e G-t átmetszené, akkor vegyük G-

nek egy olyan Q' pontját, amely e-nek P-t tartalmazó félsíkjába esik. Q' egyrészt nem eshet a P körül $\overline{PQ}$ sugárral írt körbe. Ha viszont e körön kívül esnék, akkor a $\overline{QQ'}$ szakasz átmetszené e kört, s mivel e szakasz G konvexitása miatt G-hez tartozik, vagy belsejébe esik, ennélfogva volna G-nek olyan pontja, amely $\overline{PQ}$-nál kisebb távolságra esik P-hez.

Abban az esetben, amikor P a G belsejében fekszik és e átmetszené G-t, akkor legyen Q' olyan pontja G-nek, amely e-nek P-t nem tartalmazó félsíkjába esik. Ekkor a Q' pontnak és a P körül $\overline{PQ}$ sugárral rajzolt körnek legkisebb konvex burka is G belsejébe (ill. kerületére) esnék. Ennek azonban Q belső pontja és így nem fekhetne rajta a G görbén.

Bebizonyítjuk, hogy ha a G és G' konvex zárt görbék közül G tartalmazza G'-t, akkor $\delta \geqq \delta'$. Ebben az esetben tehát $E(G, G') = \delta$.

Ez az állítás egyszerűen abból következik, hogy ha P' a G' görbe tetszőleges pontja, akkor ehhez mindig található G-nek olyan P pontja, melyre

$$E(P, G') \geqq E(P', G).$$

(Megfordítva azonban nem áll, amint azt két egyenlőoldalú háromszög csúcspontjainak példáján láthatjuk, amely háromszögek oldalai párhuzamosak és súlypontjuk összeesik.) Húzzunk ugyanis G'-höz annak P' pontjában támaszegyenest, és legyen P a G görbe azon pontja, amelyben e támaszegyenesre merőleges egyenes G-t metszi. Ekkor nyilván $\overline{PP'} = E(P, G') \geqq E(P', G)$, amely egyenlőtlenség annak következménye, hogy P nem feltétlenül P'-höz legközelebb eső pontja G-nek.

A fentiekből következik, hogy *a PP' szakasz, amelyre $\overline{PP'} = \delta = E(G, G')$, merőleges G'-re. Kimutatjuk, hogy merőleges G-re is.*

Ha ugyanis P-ben a $\overline{PP'}$-re húzott m merőleges metszené a G görbét, akkor volna G-nek P_1 pontja az m által alkotott abban a félsíkban, amely P'-t nem tartalmazza. G-nek erre a P_1 pontjára feltevésünkkel ellentétben $E(P_1, G) > \overline{PP'} = E(G, G')$ állna.

Parallelgörbe. Valamely G konvex, zárt görbéhez tartozó külső δ-paralelgörbén a G-n kívül fekvő azon Q pontok összességét értjük, melyekre $E(Q, G) = \delta$. Könnyű belátni, hogy az így kapott G_δ ponthalmaz egy konvex, zárt görbe, amelyre $E(G, G_\delta) = \delta$ áll. Valamely G-t tartalmazó G' görbére, amely teljesen G_δ belsejébe esik, $E(G, G') < E(G, G_\delta) = \delta$ érvényes.

5. A minimál-körgyűrű unicitásának egy bizonyítása

Eredeti problémánkhoz visszatérve vizsgáljuk meg, mit jelent a G konvex zárt görbe valamely K fedőkörének távolsága G-től. Jelentse P és Q a K fedőkörnek, ill. a G görbének azon pontjait, melyekre $\overline{PQ} = E(K, G)$. A $\overline{PQ}$ távolság merőleges a körre és így keresztül megy annak 0 középpontján. Ha tehát P-vel K változó pontját jelöljük, Q-val az $\overline{OP}$ sugár és G metszéspontját, akkor

$$E(K, G) = \max_P (\overline{OP} - \overline{OQ}) = \overline{OP} - \min_Q \overline{OQ}.$$

Tehát a körnek a görbétől való távolsága megegyezik annak a körgyűrűnek a szélességével, amelynek külső köre K, belső köre az O köré a görbe belsejébe maximális sugárral rajzolható kör.

Ha K helyett az O köré rajzolható, G-t tartalmazó legkisebb sugarú K' kört tekintjük, akkor K'-nek G-től való távolsága megegyezik annak a legkeskenyebb körgyűrűnek szélességével, amely O köré rajzolható és G-t tartalmazza.

Vagyis arra az eredményre jutottunk, hogy keresni a G-t tartalmazó legkeskenyebb körgyűrűket, azonos feladat azon fedőkörök meghatározásával, melyeknek G-től vett távolsága a legkisebb. Ez lényegében LEBESGUE megjegyzése.

A minimál-körgyűrű unicitását tehát bebizonyítottuk, ha kimutatjuk, hogy G-hez egy és csakis egy fedőkör van, amely tőle minimális távolságra esik.

Tegyük fel, hogy két ilyen kör volna, K és K', O, ill. O' középpontokkal. A görbétől való közös távolságuk legyen δ. A G_δ parallelgörbe ekkor nyilván tartalmazza K-t és K'-t, valamint azok legkisebb konvex burkát. Az a kör, amelynek középpontja az $\overline{OO'}$ szakaszra esik és átmegy a két kör metszéspontjain, tartalmazza K és K' közös részét és így G-t is. E kör továbbá teljesen benne fekszik K és K' konvex burkában és ennélfogva G_δ-ban. Ez tehát G-nek olyan fedőköre, melynek tőle való δ_1 távolságára feltevésünkkel ellentétben $\delta_1 < \delta$ állana.

6. A görbétől legkisebb távolságra eső fedőellipszis

Tekintsük most mindazokat az ellipsziseket, amelyek a G görbét teljesen lefedik. *A görbét fedő ellipszisek közül egy és csakis egy olyan van, amelynek a görbétől vett távolsága a lehető legkisebb.*

E tétel a minimál-körgyűrű unicitásának bizonyítására fentebb alkalmazott gondolatmenettel bizonyítható, azonban két ellipszis kölcsönös helyzetének sokfélesége miatt a teljes bizonyításhoz némi további diszkusszió szükséges.

Tegyük fel, hogy a görbét lefedő ellipszisek közül volna két különböző, amelyek a mondott minimáltulajdonsággal bírnak. Ha δ-val jelöljük ezeknek a G-től való közös távolságát, akkor a G_δ paralelgörbe mindkét ellipszist — és így azok legkisebb konvex burkát is — tartalmazza. E konvex buroknak G-től való távolsága ennélfogva maga is δ.

a) Vegyük most azt az esetet, amikor a két ellipszis négy különböző pontban metszi egymást. A görbe ekkor teljesen ezek közös részében helyezkedik el, és mindkét ellipszisnek még két-két része van, amelyekben a görbének nincs pontja. Húzzunk a két ellipszis valamelyik metszéspontjában támaszegyenest a két ellipszis közös részéhez, amely egyik ellipszist sem érinti. Tekintsük most azt a további ellipszist, amely keresztül megy a két ellipszis négy metszéspontján és e támaszegyenest érinti. Az így egyértelműen meghatározott ellipszis csakis a két ellipszis által lefedett részen halad, de nem metsz bele azok közös részébe. Nem lehet ugyanis még egy közös pontja egyik ellipszissel sem, hiszen akkor azzal összeesnék. Ennélfogva olyan ellipszist szerkesztettünk, amely G teljesen lefedi és a G_δ-nak határozottan belsejébe esik. Ekkor azonban e harmadik fedőellipszis — feltevésünkkel ellentétben — δ-nál határozottan kisebb távolságra esnék G-től, amivel ellentmondáshoz, és így állításunk bizonyításához jutottunk.

b) Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a két ellipszis egy pontban érintkezik és két további pontban metszi egymást. Ha az érintési pont G-től δ-nál kisebb távolságra esik, akkor az előző eljárás eredményre vezet: az az ellipszis, amely érintővel bír a két ellipszis érintési pontjában, keresztülmegy a két további metszésponton, s ezek egyikében az *a)*-ban körülírt támaszegyenest érinti, szintén fedi G-t és attól δ-nál kisebb távolságra esnék.

Ha a két ellipszis érintési pontja δ távolságra esik G-től, akkor a következő módon konstruálhatunk ellipszist, amely feltevésünkkel ellentétben δ-nél kisebb távolságra esik G-től:

Az A pontban érintkező két minimális fedőellipszis közül az A-ban kívülről haladót jelöljük E_1-el, a másikat E_2-vel. Másik két metszéspontjuk legyen B és C. Az előző pont lemmája szerint az ellipszisek A ponthoz tartozó e érintőjére merőleges egyenes olyan A' pontban metszi G-t, amely A-tól δ távolságra esik és G e pontjához húzható e-vel párhuzamosan támaszegyenes. Messe e támaszegyenes E_2-t, B' és C' pontban. (B és C pontok az E_2 ellipszis $B'C'$ azon ívére essenek, amely A-t nem tartalmazza; ha ez nem következnék be, akkor az AA' szakasz olyan merőlegesét vesszük, amelynek E_2-vel vett B'' és C'' metszéspontjai ezt a feltételt kielégítik, s most ezeket jelöljük B', ill. C'-vel.) Ekkor a G görbét tartalmazza az a $B'C'CB$ idom, melynek határát a $B'C'$ egyenesszakasz, ez E_2 ellipszis BB', ill. CC' íve, továbbá az E_1 ellipszis BC íve határolják. Tekintsük most az AA' szakasznak egy A-hoz közeli A'' pontját és képezzük azt az ellipszist, amely átmegy A'', B és C pontokon és B-ben előírt — a két ellipszis közös részét át nem metsző — érintővel rendelkezik. Ennek az ellipszisnek nem lehet E_1-gyel B és C pontokon kívül közös pontja, mert akkor két ilyen pontja volna s öt eleme megegyeznék vele, tehát összeesnének. Teljesen belsejében halad a két ellipszis legkisebb konvex burkának azonban nem feltétlenül tartalmazza azt a $B'C'CB$ előbb említett idomot, melynek G belsejébe esik. Azonban A''-nak A-hoz való elég közeli megválasztásával, továbbá a B-beli érintőnek az E_2 ellipszis ugyanezen ponthoz tartozó érintőjéhez való kellő közelségével ez a követelmény nyilván kielégíthető. Ezzel bizonyításunkat ez esetre is befejeztük.

c) Azok az esetek, amikor a két ellipszis egy érintési ponttal, továbbá amikor két érintési ponttal rendelkezik, az *a)* és *b)* pontokban alkalmazott gondolatmenettel intézhetők el.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a G konvex zárt síkgörbéhez egy és csakis egy fedőellipszis található, amelynek G-től való távolsága a legkisebb. El nem intézett *kérdés, hogy vajon ezt az ellipszist milyen geometriai tulajdonság jellemzi,* hasonlóan pl. a minimál-körgyűrű Bonnesen-féle tulajdonságához. Kérdés továbbá, hogy az ellipszis adatai (nagytengely, kistengely) milyen relációban vannak a görbe megfelelő adataival (átmérő, szélesség).

7. Egy tétel a görbe n-fókuszú ellipszisekkel való approximálhatóságának lehetetlenségéről

Ismeretes, hogy egy korlátos, zárt síkgörbe tetszőlegesen megközelíthető lemniszkátákkal; n-edrendű lemniszkáta az a görbe, amelynek minden pontja azzal a tulajdonsággal bír, hogy n számú megadott ponttól vett távolságainak *szorzata* állandó. E tétel WEIERSTRASS approximációs tételének komplex síkra vonatkozó megfelelője és HILBERTtől származik. — Az n-fókuszú ellipszisek *konvex* görbék és így legfeljebb az volna várható, hogy ezekkel egy tetszőleges *konvex,* zárt síkgörbe közelíthető meg, ha a fókuszok számát növeljük. Ezt a kérdést azonban tagadó értelemben válaszoljuk meg, amennyiben bebizonyítjuk a következő tételt:

Egyenlőoldalú háromszög nem közelíthető meg tetszőlegesen n-fókuszú ellipszisekkel. — A bizonyításban egyszerűség kedvéért egységnyi oldalhosszú háromszögre szorítkozunk.

Mielőtt a bizonyításra rátérnénk, az n-fókuszú ellipszisek néhány egyszerű tulajdonságát említjük. Nevezzük ezeket a görbéket W_n görbéknek, melyek az adott $F_1, F_2, \ldots F_n$ fókuszokhoz tartoznak. A görbét azon P pontok alkotják, amelyekre

$$F(P) = \sum_{i=1}^{n} \overline{PF_i} = c \qquad (c_0 \leqq c \leqq \infty).$$

Itt c_0 az az érték, amelyre az $F(P)$ függvény az egész síkban minimális.

A W_n görbék egyszerű, konvex, zárt görbék, egyrétűen kitöltik az egész síkot, s ha az $F_i (i = 1, 2, \ldots n)$ pontok nem esnek egy egyenesre, akkor egyetlen pontra zsugorodnak össze, ti. arra az O pontra, amelyre $F(0) = c_0$. Ha a fókuszok egy egyenesszakaszra esnek, akkor e zárt egyenesszakasz minden Q pontjára $F(Q) = c_0$. Ha $c' > c$, akkor a c'-höz tartozó W_n görbe tartalmazza a c-hez tartozó görbét.

A konvexitás és a további említett tulajdonságok egyszerű következményei annak, hogy ha az $F(P)$ függvény a sík P_1 és P_2 pontjában azonos értéket vesz fel, akkor a $P_1 P_2$ szakasz P_0 felezőpontjában felvett értéke legfeljebb ugyanakkora. Ugyanis i minden értékére áll a következő elemi egyenlőtlenség:

$$\frac{\overline{F_i P_1} + \overline{F_i P_2}}{2} \geqq \overline{F_i P_0}.$$

s az egyenlőség csak akkor éretik el, ha F_i a $P_1 P_2$ egyenesre esik. Ebből összegezéssel adódik állításunk.

Tehát, ha az F_i pontok nem mindegyike esik egy egyenesre, akkor az $F(P)$ függvény a sík egyetlen pontjában veszi fel minimumát. Az így definiált 0 pontra nézve fennáll, hogy e pontból az F_i fókuszok felé mutató egységvektorok vektoriális összegének abszolút értéke vagy 0, vagy legfeljebb l, pozitív egész szám, s ez utóbbi eset akkor következik be, ha a 0 pont maga l-szeres fókuszpontja a görbének. (E tétel bizonyítását lásd WEISZFELD [10].) Vagyis mindenesetre áll a következő relációk valamelyike:

$$\text{(1. a)} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{OF_i}}{\overline{OF_i}} = 0, \qquad \text{(1. b)} \quad \left| \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{\overrightarrow{OF_i}}{\overline{OF_i}} \right| \leqq l.$$

Ez utóbbi eset arra vonatkozik, amikor az O pont összeesik az F_K ponttal, amely l-szeres fókusz s a Σ' jel azt jelenti, hogy az O pontra nem kell összegezni.

Tekintsünk most egy egyenlőoldalú háromszöget és egy ezt tartalmazó W_n görbét. Ha W_n nem megy keresztül egy csúcson sem, akkor ugyanezen fókuszhoz nyilván tartozik olyan W_n' görbe, amely átmegy legalább egy csúcson és jobban közelíti a háromszöget. Ha most W_n' a háromszögnek csak egy vagy két csúcsán menne keresztül, akkor konstruálhatunk olyan legfeljebb $6n$ fókuszú ellipszist, amely W_n'-nél jobban közelíti a görbét és mindhárom csúcson keresztülmegy. Tükrözzük ugyanis pontrendszerünket sorban a háromszög magasságaira nézve — minden újabb tükrözést az összes eredeti pontokra és a kapott tükörképekre hajtva végre. Az ilymódon nyert $6n$ pont* háromszögszimmetriát mutat, s így nyilván tartozik ehhez olyan W_{6n} görbe, amely keresztülmegy az egyenlőoldalú háromszög minden csúcsán. Ha az eredeti görbe c állandóhoz tartozott, akkor a görbének tükrözései által ugyancsak legfeljebb 6 görbét kapunk, amelynek mindegyike n fókuszhoz tartozó ellipszis s ugyanazon c állandóhoz tartoznak. E hat görbe közös külső burkolója nyilván nem esik nagyobb távolságra a háromszögtől, mint az eredeti, viszont e külső burok *belsejébe* esik az a W_{6n} görbe, amely a legfeljebb $6n$ ponthoz $6c$ állandóval tartozik, továbbá ez tartalmazza a háromszöget is. Ugyanis az említett külső burkon kívül eső pontoktól a fókuszok távolságösszege nagyobb, mint $6c$, viszont a háromszögön belüli pontokban (sőt, még a csúcsokban is) kevesebb $6c$-nél.

Térjünk ezután tételünk bizonyítására. Legyenek a háromszög csúcsai A, B és $C(\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=1)$ legyenek továbbá az oldalak felező pontjai rendre C_1, A_1, B_1.

Tegyük fel most, hogy a háromszög tetszőlegesen közelíthető volna többfókuszú ellipszisekkel, vagyis az előre megadott ε-hoz találhatunk olyan W_n görbét, amelynek a háromszögtől vett távolsága ezen ε-nál kisebb. Ebből ellentmondásra fogunk jutni. Feltehetjük az előbb mondottaknál fogva, hogy W_n keresztül megy az A, B és C pontokon, háromszögszimmetriát mutat, és így O középpontja összeesik a háromszög középpontjával. Messe az AA_1 oldalfelező a W_n görbét az L pontban. Feltevéseink értelmében $\overline{A_1L} < \varepsilon$, ugyanis W_n konvexitása és szimmetriája miatt $\overline{A_1L}$ éppen a görbe és háromszög távolsága.

Most néhány segédtételt bizonyítunk be, amelyekben szereplő $k_1, k_2, \ldots$ mennyiségek pozitív, abszolút állandókat jelentenek.

* Esetleges multiplicitások figyelembe vételével számuk pontosan $6n$-nek vehető.

1. SEGÉDTÉTEL. *Ha F a sík tetszőleges pontja, akkor az $\overline{FB}+\overline{FC}-2\overline{FA_1}$, $\overline{FA}+\overline{FB}-2\overline{FC_1}$, $\overline{FC}+\overline{FA}-2\overline{FB_1}$ nemnegatív mennyiségek legalább egyike nagyobb, mint $\frac{k_1}{1+\overline{OF}}$, ahol O a háromszög középpontja (magasságpontja).*

A szimmetria miatt elég szorítkozni a $B_1OA_1\sphericalangle$ által alkotott szögtérre. Egy ebben felvett F pontra megmutatjuk, hogy a felírt három mennyiség közül az elsőre áll fenn az állítás. Tekintsük e szögtérnek azt a véges részét, amelyet egy 0 körül rajzolt $R(>2)$ sugarú kör és a két szár határolnak. E véges tartományban az első kifejezés határozottan pozitív és felveszi k' minimumát. Erre felírhatjuk tehát, hogy

$$\overline{FB}+\overline{FC}-2\overline{FA_1}\geqq k'\geqq\frac{k'}{1+\overline{OF}}.$$

Tekintsük most a szögtér külső pontjait és jelöljük az $FA_1C\sphericalangle$-et δ-val, FA_1-et f-fel. Ekkor

$$\frac{\pi}{6}\leqq\delta\leqq\frac{5\pi}{6},\quad\text{vagyis}\quad 0\leqq\cos^2\delta\leqq\frac{3}{4},\quad\text{továbbá}\quad f<1+\overline{OF}.$$

A koszinusz tételből kifejezve $\overline{BF}$ és $\overline{CF}$-et, majd sorfejtést alkalmazva nyerjük:

$$\overline{BF}+\overline{CF}-2\overline{A_1F}=\sqrt{f^2-f\cos\delta+\frac{1}{4}}+\sqrt{f^2+f\cos\delta+\frac{1}{4}}-2f=$$

$$=\frac{1-\cos^2\delta}{4}\,\frac{1}{f}+\sigma\left(\frac{1}{f}\right).$$

Itt

$$\frac{1-\cos^2\delta}{4}\geqq\frac{1}{16}\quad\text{és}\quad\frac{1}{f}>\frac{1}{1+\overline{FO}},$$

amiből elég nagy R-re a

$$\overline{BF}+\overline{CF}-2\overline{A_1F}>\frac{k''}{1+\overline{OF}}$$

relációt és $k_1=\min(k';k'')$ állandóval első segédtételünk bizonyítását nyerjük.

Minthogy a W_n minimálgörbe fókuszainak legalább harmadrésze jut egy szögtérbe, tehát $F=F_i$ helyettesítéssel és összeadással a

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \overline{F_iB} + \sum_{i=1}^{n} \overline{F_iC} - 2\sum_{i=1}^{n} \overline{F_iA_1} \geqq \frac{k_1}{3} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\overline{F_iO}}$$

egyenlőtlenséget nyerjük.

Ahhoz, hogy (2) baloldalán álló összeget most felülről becsüljük, bebizonyítjuk a következő

2. SEGÉDTÉTELt. *Legyen az A_1LF háromszögben $\overline{A_1L} < 1$, jelöljük továbbá az A_1 csúcsnál levő szöget δ-val, akkor*

$$(3) \qquad \overline{LF} < \overline{A_1F} - \overline{A_1L}\cos\delta + \overline{A_1L}\,\frac{k_2}{1+\overline{A_1F}}.$$

$$\overline{LF} = d\ \overline{A_1F} = d'\ \overline{A_1L} = h,\ d' - h\cos\delta = d''$$

jelölésekkel a

$$d < d' - h\cos\delta + h\frac{k_2}{1+d'} = d'' + h\frac{k_2}{1+d'}$$

egyenlőtlenséget kell igazolni, ha $h < 1$.

Három esetet különböztetünk meg az F csúcsnál fekvő β szög nagyságának megfelelően.

a) $\beta = 0°$. Ekkor vagy $\delta = \pi$ és

$$d = d' + h = d' - h\cos\pi < d' - h\cos\pi + h\frac{1}{1+d'},$$

vagy pedig $\delta = 0$ és

$$d = d' - h < d' - h\cos 0 + h\frac{1}{1+d'}.$$

b) $0 < \beta \leqq \frac{\pi}{2}$. Minthogy d'' a d-nek d'-re eső vetülete, ekkor $d + d'' > d > 0$ s a PYTHAGORAS-tételből

$$d - d'' = d - d' + h\cos\delta = \frac{h^2\sin^2\delta}{d+d''}.$$

Ez akkor kisebb $h\frac{k_2}{1+d'}$-nél, ha

$$k_2 < \frac{h\sin^2\delta}{d+d''} + \frac{hd'\sin^2\delta}{d+d''}.$$

Minthogy $h\sin\delta < d + d''$, azért az első tag kisebb egynél. A második tagra nézve $hd'\sin\delta = hd\sin\alpha$ miatt, ahol α az L

csúcsnál lévő szöget jelenti,

$$\frac{hd'\sin^2\delta}{d+d''}=\frac{hd\sin\alpha\sin\delta}{d+d''}<h\sin\alpha\sin\delta<1,$$

s így $k_2=2$-vel a *b)* esetben is igazoltuk lemmánkat.

c) $\frac{\pi}{2}<\beta\leqq\pi$. Ekkor $d'-h\cos\delta=d''<0$, továbbá $d'<h<1$ és

$$d-d''<d+d'-d''<2h<h\frac{4}{1+d'}.$$

Ilymódon $k_2=4$ állandóval 2. segédtételünk igazolást nyert.

Minthogy $\overline{A_1O}=\frac{\sqrt{3}}{6}<1$, ennélfogva a sík minden F pontjára a

$$\frac{k_2}{1+\overline{A_1F}}<\frac{k_3}{1+\overline{OF}} \tag{4}$$

egyenlőtlenség áll fenn. Legyen ugyanis R elég nagy és $\overline{OF}<R$, akkor

$$\frac{k_2}{1+\overline{A_1F}}<k_2=k_2\frac{1+R}{1+R}<\frac{k_3}{1+\overline{OF}}.$$

Ha viszont $R\leqq\overline{OF}<\overline{A_1F}+1$, akkor ugyancsak R-től függő k_3 állandóval az $\frac{1}{1+x}$ függvény viselkedése miatt

$$\frac{1}{1+\overline{OF}}>\frac{1}{2+\overline{A_1F}}>\frac{\frac{1}{k_3}}{1+\overline{A_1F}}. \qquad \text{q. e. d.}$$

A (4) reláció miatt a (3) egyenlőtlenséget a

$$\overline{LF}<\overline{A_1F}-\overline{A_1L}\cos\delta+\overline{A_1L}\frac{k_3}{1+\overline{OF}} \tag{3'}$$

alakban írhatjuk. Helyettesítve F helyébe a W_n görbe fókuszait, ahol is δ helyébe $\delta_i=LA_1F_i\sphericalangle$ írandó, és összegezve i-re, a következőt nyerjük:

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{LF_i}<\sum_{i=1}^{n}\overline{A_1F_i}-\overline{A_1L}\sum_{i=1}^{n}\cos\delta_i+\overline{A_1L}\,k_3\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\overline{OF_i}}.$$

Minthogy L a W_n görbe pontja éppúgy, mint a B és C csúcsok, továbbá $\overline{A_1L} < \varepsilon$ miatt egyenlőtlenségünket még a következő alakban is írhatjuk

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{BF_i} + \sum_{i=1}^{n} \overline{CF_i} - 2\sum_{i=1}^{n} \overline{A_1F_i} \leqq 2\varepsilon \left| \sum_{i=1}^{n} \cos \delta_i \right| + 2\varepsilon k_3 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\overline{OF_i}}.$$

Ha most még megmutatjuk, hogy

$$(5) \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} \cos \delta_i \right| < k_4 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\overline{OF_i}},$$

akkor a

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{BF_i} + \sum_{i=1}^{n} \overline{CF_i} - 2\sum_{i=1}^{n} \overline{A_1F_i} < \varepsilon k_5 \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{1+\overline{OF_i}}$$

egyenlőtlenséget nyerjük, amely elég kis ε-ra ellentmond a (2) egyenlőtlenségnek. Ebből tehát azt nyerjük, hogy a W_n görbe L pontja nem jöhet tetszőleges közel a háromszög A_1 pontjához, ami kimondott tételünk bizonyítását adja. A szereplő k_i állandók ugyanis függetlenek mind n-től, mind ε-tól.

(5) egyenlőtlenségünk igazolására — az

$$\vec{f}(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{PF_i}}{\overline{PF_i}}$$

jelölés bevezetésével — az

$$|\vec{f}(L)| < k_5 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\overline{OF_i}}$$

relációt igazoljuk. Ugyanis a $\left| \sum_{i=1}^{n} \cos \delta_i \right|$ az $\vec{f}(L)$ vektor OL egyenesre eső vetületének abszolút értéke. Megmutatjuk, hogy

$$(6) \qquad |\vec{f}(L)| < |\vec{f}(O)| + k_6 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\overline{OF_i}} < k_5 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\overline{OF_i}}.$$

Az egyenlőtlenség második része az (1 a) ill. (1 b) relációk következménye. Ha ugyanis O nem esik össze valamely fókusszal, akkor $\vec{f}(O) = O$ és $k_5 = k_6$. Ha viszont az O-pont l-szeres fókusz, akkor a $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\overline{OF_i}}$-ben l számú 1-es szerepel, és így $|f(O)| \leqq l <$ $< \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\overline{OF_i}}$, amivel $k_5 = k_6 + 1$-vel igaz állításunk. (6) egyenlőtlenségünk igazolására jelöljük az A_1OF_i szöget γ_i-vel. Ekkor, ha $\overline{F_iO} < R$, akkor

$$|\cos\gamma_i - \cos\delta_i| < 2 = 2\frac{1+R}{1+R} < \frac{2(1+R)}{1+\overline{OF_i}} = \frac{k_6'}{1+\overline{OF_i}}.$$

Válasszuk most az R távolságot olyan nagyra, hogy e sugarú körön kívül az $\overline{OA_1}$ távolság már $\alpha_i < \alpha_0$ szög alatt lássék, amely α_0-ra $\sin\alpha_0 < \alpha_0$ és $1 - \cos\alpha_0 < \alpha_0$ álljon. Ekkor mivel $\alpha_i = \gamma_i - \delta_i < \alpha_0$, (ha $\gamma_i > \delta_i$)

$$|\cos\gamma_i - \cos\delta_i| = |\cos(\delta_i + \alpha_i) - \cos\delta_i| =$$

$$= |\cos\delta_i(\cos\alpha_i - 1) - \sin\delta_i \sin\alpha_i| < |\cos\alpha_i - 1| + |\sin\alpha_i| < 2\alpha_0.$$

Másrészt azonban $\alpha_i \sim \dfrac{\overline{A_1F_i}}{\overline{OF}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2\cdot\overline{OF_i}} < \dfrac{k_6''}{1+\overline{OF_i}}$, ha $R>1$.

Hasonló módon nyerhetünk az $f(L)$ vektor más komponensére becslést, s az $\vec{a}_i$ és $\vec{b}_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ vektorokra vonatkozó

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i\right| \leqq \left|\sum_{i=1}^{n}\vec{b}_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}(\vec{a}_i - \vec{b}_i)\right| \leqq \left|\sum_{i=1}^{n}\vec{b}_i\right| + \sum_{i=1}^{n}|\vec{a}_i - \vec{b}_i|$$

egyszerű reláció alkalmazásával a (6) egyenlőtlenség bizonyítását nyerjük. Ezzel azonban jelen pont elején kimondott tételünket teljesen bebizonyítottuk.

Tekintsük most az (x, y) síkban azt a 3 fókuszú ellipszist, amelynek fókuszai $F_1(0, 1)$, $F_2(0, -1)$ és $F_3(r, 0)$, ahol $r > 0$, és amely keresztülmegy az F_1 és F_2 fókuszon. Ennek egyenlete

$$\sqrt{x^2+(1+y)^2} + \sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{(x-r)^2+y^2} = 2 + \sqrt{r^2+1}.$$

Ha most $r \to \infty$, akkor e 3 fókuszú görbék — folytonosan változva — ahhoz a korlátos, zárt konvex görbéhez tartoznak, amelynek egyenlete

$$\sqrt{x^2+(1+y)^2} + \sqrt{x^2+(1-y)^2} = 2 - x.$$

Ezt az egyenletet kielégíti az $x = 0$, $-1 \leqq y \leqq 1$ egyenesszakasz, amivel példát adtunk arra, hogy 3 fókuszú görbék tetszőlegesen megközelíthetnek olyan görbét, amely egy egyenesszakaszt tartalmaz. Felvetődik a kérdés, hogy létezik-e konvex, zárt síkgörbe, amely pontosan két egyenesszakaszt tartalmaz és amely megközelíthető többfókuszú ellipszisekkel.

IRODALOM

[1] Blaschke, W.: Kreis und Kugel. 2. Aufl. Berlin, W. de Gruyter. 1956.

[2] Bonnesen, T.—Fenchel, W.: Theorie der konvexen Körper. Berlin, 1934.

[3] Bonnesen, T.: Über das isoperimetrische Deficit ebener Figuren. Math. Ann. 91. kötet (1924) 252—268 o.

[4] Bonnesen, T.: Les problèmes des isopérimetres et des isepiphanes. Paris, Gauthier-Villars, 1929.

[5] Jaglom, I. M.—Boltjanski, W. G.: Konvexe Figuren. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956.

[6] Kritikos, N.; Über konvexe Flächen und einschliessende Kugeln. Math. Ann. 96 kötet (1927) 583 o.

[7] Lebesgue, H.: Sur quelques questions de minimum relatives aux courbes orbiformes et sur leurs rapports avec le calcul des variations. Journal de Mathematiques pures et appliquées, 8e serie, t. IV., p. 67 96, (1921).

[8] Szőkefalvi-Nagy Gy.: Über einen Satz von H. Jung. Jahresbericht d. d. Math. Verein 24.

[9] Vincze, I.: Über den Minimalkreisring einer Eilinie. Acta Universitatis Szegediensis, XI. kötet, 133—138 o. (1947).

[10] Weiszfeld, E.: Sur le point pour lequel la somme des distance de n points donnés est minimum. The Tohoku Math. Journal. Sendai, 1937. Vol. 43. Part II. p. 355—386.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ВЫПУКЛЫХ ЗАМКНУТЫХ ПЛОСКОСТНЫХ КРИВЫХ

Пал Эрдэш и Иштван Винце

(Резюме)

Работа приводит несколько известных теорем связанных с наименьшей описанной и наибольшей вписанной окружностью, относящихся к некоторой выпуклой замкнутой кривой, а также с минимальным круговым кольцом, и ставит несколько дальнейших проблем. Затем доказывается следующая теорема: среди эллипсов, содержащих некоторую выпуклую замкнутую плоскостную кривую, лишь один обладает тем свойством, что его расстояние от кривой минимально.

Э. Важони поднял следующий вопрос: могут ли выпуклые замкнутые плоскостнуе кривые как угодно аппроксимироваться эллипсами с большим числом фокусов (кривыми Чирнхауса). Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос: Равносторонний треугольник не может быть как угодно аппроксимирован эллипсами с большим числом фокусов. Работа содержит пример кривой, содержащей **один** отрезок прямой, которая может быть как угодно приближенна эллипсами с тремя фокусами. Спрашивается, существует ли такая выпуклая замкнутая кривая, которая содержит два отрезка прямых и может быть как угодно приближенна эллипсами с большим числом фокусов.

ÜBER DIE ANNÄHERUNG GESCHLOSSENER, KONVEXER KURVEN

P. ERDŐS und I. VINCZE

In den Paragraphen 1—5 sind einige bekannte Sätze über den Umkreis, den Inkreis und den Minimalkreisring geschildert, weiterhin einige mit diesen zusammenhängende Probleme gestellt. In Paragraph 6. ist der folgende Satz bewiesen: Unter den Ellipsen, die eine gegebene konvexe Kurve enthalten, gibt es genau eine, die von dieser einen minimalen Abstand besitzt.

E. Vázsonyi stellte die Frage, ob eine geschlossene, konvexe Kurve sich durch „Ellipsen" mit mehreren Brennpunkten (durch sogenannten Tschirnhaus-Kurven) beliebig approximieren lässt, wenn die Anzahl der Brennpunkte genügend gross ist. Diese Frage wird in § 7. im negativen Sinne mit dem folgenden Satz beantwortet: Ein gleichseitigen Dreieck lässt sich nicht durch Ellipsen mit mehreren Brennpunkte approximieren. Es ist ein Beispiel einer geschlossenen konvexen Kurve angegeben, die einen geradlinigen Abschnitt enthält und die durch Ellipsen, mit drei Brennpunkte approximiert werden kann. Es ist aber eine offene Frage, ob es eine geschlossene konvexe Kurve mit zwei geradlinigen Abschnitten gibt, die durch Ellipsen mit mehreren Brennpunkte beliebig approximierbar ist.