# Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe

Von

**P. Erdös,** Budapest

*(Eingegangen am 5. Oktober 1959)*

*Es sei* $(a, d) = 1$, $1 \leqslant a < d$. *Dann gibt es eine absolute Konstante* $c$, *so daß die kleinste quadratfreie Zahl in der arithmetischen Progression* $a + k\,d$, $k = 0, 1, \ldots$ *kleiner als* $c\, d^{3/2}/\log d$ *ausfällt.*

Dies ist eine kleine Verschärfung eines Satzes von *Prachar*, der $d^{3/2+\varepsilon}$ (genauer $d^{3/2}\, 2^{\,c \log d/\log\log d}$) bewies, unsere Methode ist der Pracharschen sehr ähnlich.

Es sei $L$ eine genügend große Zahl, die von $d$ nicht abhängt. Die Anzahl der Zahlen $0 \leqslant k < c\, d^{1/2}/\log d$ für die $a + k\,d \not\equiv 0 \pmod{p^2}$, $p < L$ gilt, ist wie man durch einen einfachen Siebprozeß sieht,

$$\frac{c\, d^{1/2}}{\log d} \prod_{\substack{p<L \\ p \nmid d}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) + o\left(\frac{d^{1/2}}{\log d}\right) > \frac{6}{\pi^2}\, \frac{c\, d^{1/2}}{\log d}. \tag{1}$$

Die Anzahl der Zahlen $0 \leqslant k < c\, d^{1/2}/\log d$, für welche $a + k\,d \equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ p^2)$, ist höchstens

$$\frac{c\, d^{1/2}}{p^2 \log d} + 1.$$

Also folgt aus (1), daß die Anzahl der Zahlen $k$, $0 \leqslant k < c\, d^{1/2}/\log d$, für welche $a + k\,d \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ für alle $p \leqslant c^{1/2}\, d^{1/2}$ ist, größer ist als

$$\frac{6}{\pi^2}\, \frac{c\, d^{1/2}}{\log d} - \frac{c\, d^{1/2}}{\log d} \sum_{p \geq L} \frac{1}{p^2} - \pi(c^{1/2}\, d^{1/2}) > \tfrac{1}{2}\, \frac{c\, d^{1/2}}{\log d}, \tag{2}$$

wegen $\pi(x) < 2\, \dfrac{x}{\log x}$ für genügend großes $L$ und $c$.

Nun wollen wir die Anzahl der Zahlen $0 \leqslant k < c\, d^{1/2}/\log d$ abschätzen, für welche für eine Primzahl $p > c^{1/2}\, d^{1/2}$ gilt: $a + k\,d \equiv 0 \pmod{p^2}$. Aus

$$a + k\,d \equiv 0 \pmod{p^2},\ k < c\,d^{1/2}/\log d \qquad p > c^{1/2}\,d^{1/2} \tag{3}$$

folgt

$$a + k\,d = \alpha\,p^2,\ \alpha < d^{1/2}/\log d. \tag{4}$$

Zuerst nehmen wir an, daß $p > d^{1/2+\varepsilon}$, dann gilt offenbar $\alpha < d^{1/2-\varepsilon}$ (für $d > d_0$). Da in (4) offenbar $p < d$ ist, ist die Anzahl der Lösungen von (4) für ein fixes $\alpha$ höchstens gleich der Anzahl der Lösungen von $x^2 \equiv \frac{a}{\alpha} \pmod{d}$, $0 < x < d$, und dies ist bekanntlich höchstens gleich $2^{v(d)} = o(d^{\varepsilon/2})$.[1] Also ist die Anzahl der Lösungen von (4) mit $p > d^{1/2+\varepsilon}$ $o(d^{1-\varepsilon/2})$. Nun endlich sei in (4)

$$c^{1/2}\,d^{1/2} < p < d^{1/2+\varepsilon}.$$

Aus (4) folgt

$$p^2 \equiv \frac{a}{\alpha} \pmod{d},\ \alpha < d^{1/2}/\log d,\ p < d^{1/2+\varepsilon}. \tag{5}$$

Es sei $c_\alpha$ die Anzahl der Lösungen von (5) für fixes $\alpha$. Offenbar ist $\Sigma\binom{c_\alpha}{2}$ kleiner oder gleich der Anzahl der Lösungen von $1 \leqslant \alpha < d^{1/2}/\log d$

$$p^2 \equiv q^2 \pmod{d},\ p < d^{1/2+\varepsilon},\ q < d^{1/2+\varepsilon}. \tag{6}$$

Aus (6) folgt $(p - q)(p + q) \equiv 0 \pmod{d}$. Also ist die Anzahl der Lösungen von (6) nicht größer als die Anzahl der Lösungen von

$$u\,v \equiv 0 \pmod{d},\ u < 2\,d^{1/2+\varepsilon},\ v < 2\,d^{1/2+\varepsilon}. \tag{7}$$

Aus (7) folgt

$$u\,v = \beta\,d,\ 1 \leqslant \beta < 4\,d^{2\varepsilon}.$$

Für ein festes $\beta$ ist die Anzahl der Lösungen von $u\,v = \beta\,d$ gleich der Anzahl der Teiler von $\beta\,d$, also $o((\beta\,d)^\varepsilon)$. Schließlich ist also die Anzahl der Lösungen von (7) $o((\beta\,d)^\varepsilon)$. $4\,d^{2\varepsilon} = O(d^{4\varepsilon})$. Also ist

$$\Sigma\binom{c_\alpha}{2} = o(d^{4\varepsilon}). \tag{8}$$

Wegen (8) gilt

$$\sum_{c_\alpha > 1} c_\alpha = o(d^{4\varepsilon}). \tag{9}$$

Aus (9) und $\alpha < d^{1/2}/\log d$ folgt schließlich

$$\Sigma\,c_\alpha \leqslant \frac{d^{1/2}}{\log d} + o(d^{4\varepsilon}). \tag{10}$$

[1] $v(d)$ sei die Anzahl der verschiedenen Primteiler von $d$.

Daher folgt, daß die Anzahl der Lösungen von (4) nicht größer als $d^{1/2}/\log d + o(d^{1/2-\varepsilon})$ ist, i. e. die Anzahl der Zahlen $0 \leqslant k < c\, d^{1/2}/\log d$, für welche $a + k\, d \equiv 0 (\bmod p^2)$, $p > c^{1/2}\, d^{1/2}$ gilt, ist nicht größer als $d^{1/2}/\log d + o(d^{1/2-\varepsilon})$. Also folgt aus (2), daß die Anzahl der Zahlen $k$, $0 \leqslant k < c\, d^{1/2}/\log d$, für welche $a + k\, d$ quadratfrei ist, mindestens

$$\tfrac{1}{2}\, c\, d^{1/2}/\log d - d^{1/2}/\log d - o(d^{1/2-\varepsilon}) > 0$$

für genügend großes $c$ ist. Damit ist unser Satz bewiesen.

Durch etwas kompliziertere Rechnungen kann man die Bedingung $(a, d) = 1$ fallen lassen. Es gilt dann folgender Satz: *Es sei* $(a, d)$ *quadratfrei. Dann ist die kleinste quadratfreie Zahl in der arithmetischen Progression* $a + k\, d$ *kleiner als* $c\, d^{3/2} \log\log d/\log d$.

Es ist wohl wahrscheinlich, daß die kleinste quadratfreie Zahl in $a + k\, d$ sogar $o(d^{1+\varepsilon})$ ist, dies ist aber wohl recht tief. Es ist leicht zu zeigen, daß die kleinste quadratfreie Zahl nicht $o(d \log d/\log\log d)$ sein kann.

Man kann leicht folgenden Satz zeigen: zu jedem $\varepsilon$ existiert ein $c_\varepsilon$, so daß mit Ausnahme von weniger als $\varepsilon\, \varphi(d)$ Zahlen $a$, $(a, d) = 1$, $1 \leqslant a < d$ die kleinste quadratfreie Zahl in $a + k\, d$ kleiner als $c_\varepsilon\, d$ ist. Allgemeiner gilt, daß wenn $\Sigma \dfrac{1}{n_i} < \infty$, dann ist mit Ausnahme von weniger als $\varepsilon\, \varphi(d)$ Zahlen $a$, $(a, d) = 1$, $1 \leqslant a < d$ die kleinste Zahl $a + k\, d \not\equiv 0 (\bmod n_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ kleiner als $c_\varepsilon\, d$.

Printed in Austria