Gráfelméleti szélső értékekre vonatkozó problémákról

Bollobás Béla és Erdős Pál

E cikkben $G_k^{(n)}$ n szögpontú (a továbbiakban szögpont helyett röviden pontot mondunk) s k élű gráfot fog jelenteni, ahol hurkokat kizárunk, s két pont legfeljebb egy éllel lehet összekötve (azaz egy és két élből álló köröket kizárunk). $\pi(G)$ jelenti G pontjainak számát és $\nu(G)$ G éleinek számát. $G-x$ jelenti azt a gráfot, amelyet nyerünk, ha G-ből elhagyjuk az x pontot és a belőle kiinduló összes éleket. Hasonló értelemben használjuk a $G-\{x_1, \ldots, x_j\}$ jelölést is. xy-úton egy olyan utat értünk, melynek az x és az y pont a két végpontja.

Turán[1] még 1940-ben felvetette a következő kérdést: Mekkora az a minimális $k=k_l(n)$ szám, hogy minden $G_k^{(n)}$ gráf tartalmazzon l pontból álló teljes részgráfot, azaz oly l pontot, hogy bármelyik kettő össze legyen kötve egy éllel. Turán e kérdésre preciz választ adott, s továbbá felvetette a következő kérdést: Mekkora $k=k(n)$ minimális értéke, hogy $G_k^{(n)}$ biztosan tartalmazzon egy előírt típusú részgráfot? E kérdésekről az utóbbi időben több cikk jelent meg[2], s e dolgozat is egy ebbe a témakörbe való kérdéssel fog foglalkozni.

Erdős és Gallai a következő kérdést vizsgálták: Mekkora $k_r=k_r(n)$ minimális értéke, hogy $G_{k_r}^{(n)}$ tartalmazzon két x_1, x_2 pontot, melyek r oly úttal vannak összekötve, melyeknek az x_1 és x_2 pontokon kívül nincsen közös pontjuk? Könnyű belátni, hogy $k_2=n$, ugyanis minden $G_n^{(n)}$, mint ismeretes (és triviális), tartalmaz kört, egy kör bármely két pontja két oly úttal összeköthető, melynek végpontjaikon kívül nincs más közös pontjuk. Másrészt viszont, ha n pont közül egyet a többivel összekötünk, nyilván oly $G^{(n)}$-et nyerünk, melyben bármely két pont csak egy úttal köthető össze.

Legyen mármost $f(2n)=3n-1$, $f(2n+1)=3n+1$. Könnyű belátni, hogy $k_3(n)=f(n)$. Ugyanis Bártfai[3] nagyon egyszerűen bebizonyította, hogy minden $G_{f(n)}^{(n)}$ tartalmaz páros számú élből álló kört és egyszerű meggondolás mutatja, hogy bizonyítása azt is adja, hogy minden $G_{f(n)}^{(n)}$ tartalmaz két pontot, mely három páronként független úttal van összekötve (azaz oly utakkal, melyeknek végpontjaikon kívül nincsen közös pontjuk). Tekintsünk másrészt n háromszöget $[x_0, x_{2i-1}, x_{2i}]$, $1 \leqq i \leqq n$, így nyerünk egy $G_{3n}^{(2n+1)}$-et (azaz egy $G_{f(2n+1)-1}^{(2n+1)}$-et), mely nem tartalmaz két pontot összekötő három független utat. Ha az $[x_0, x_{2n-1}, x_{2n}]$ háromszögből csak az (x_0, x_{2n-1}) élt hagyjuk meg, nyerünk egy $G_{3n-2}^{(2n)}$-et (azaz egy $G_{f(2n)-1}^{(2n)}$-et), mely nem tartalmaz két pontot összekötő három független utat, ezzel $k_3(n) = f(n)$ bizonyítását befejeztük. $k_r(n)$ értékét $r > 3$-ra nem sikerült meghatároznunk, talán $k_4(3n+1) = 6n+1$. n egyetlen közös ponttal bíró tetraéder példája mindenesetre adja, hogy $k_4(3n+1) > 6n$.

A G gráfról akkor mondjuk, hogy teljes topologikus r-szöget tartalmaz, ha G-nek van r olyan pontja: $y_1, y_2, \ldots, y_r$, hogy bármely kettő összeköthető oly utakkal, melyeknek végpontjaikon kívül nincs más közös pontjuk. Ezek szerint egy teljes topologikus háromszög egyszerűen egy kör, tehát minden $G_n^{(n)}$ tartalmaz teljes topologikus háromszöget, s van oly $G_{n-1}^{(n)}$, mely nem tartalmaz teljes topologikus háromszöget. DIRAC[4] bebizonyította, hogy minden $G_{2n-2}^{(n)}$ tartalmaz teljes topologikus négyszöget, de van oly $G_{2n-3}^{(n)}$, mely nem tartalmaz teljes topologikus négyszöget. Analóg tétel teljes topologikus ötszögre nem ismeretes. Mindenesetre van oly $G_{3n-6}^{(n)}$, mely nem tartalmaz teljes topologikus ötszöget. Hogy ezt beláthassuk, tekintsünk egy n szögpontú maximális élszámú síkba rajzolható gráfot, ez csupa háromszögből áll, s ezért Euler poliédertételéből könnyen adódik, hogy e gráfnak $3n-6$ éle van, s mint síkba rajzolható gráf, mint ismeretes, nem tartalmazhat teljes topologikus ötszöget. Lehetséges azonban, hogy minden $G_{3n-5}^{(n)}$ tartalmaz teljes topologikus ötszöget.

Egy teljes topologikus négyszöget a következő módon lesz célszerű elképzelnünk: Egy K kör és egy x_0 pont, mely nincs a körön, s melyből három páronként idegen út vezet a K kör x_1, x_2, x_3 pontjaihoz. Az x_0, x_1, x_2, x_3 pontok egy topologikus teljes négyszöget határoznak meg. TURÁN, mint már a bevezetés elején elmondottuk, bebizonyította, hogy minden $G_l^{(n)}$,

$$l = \frac{1}{3}(n^2 - r^2) + \binom{r}{2} + 1 \qquad \begin{pmatrix} n = 3t + r \\ 0 \leqq r < 3 \end{pmatrix},$$

tartalmaz teljes négyszöget — azaz oly speciális teljes topologikus négyszöget, melyben a pontokat összekötő utak élek. Kérdezhetjük, mármost, mekkora az a legkisebb $h_3(n)$ szám, hogy minden $G_{h_3(n)}^{(n)}$ tartalmaz egy oly K kört és egy x_0 pontot, mely nincs a körön, s melyből legalább három oly él indul ki, mely K szögpontjaihoz vezet (ez az alakzat megint egy speciális teljes topologikus négyszög). $h_3(n)$ értékét egyelőre nem tudjuk meghatározni, nincsen kizárva, hogy $h_3(n)=2n-2$ (azaz ha DIRAC tétele szerint van teljes topologikus négyszög, mindjárt a mi speciális teljes topologikus négyszögünk is előfordulna gráfunkban).

Jelentse általában $h_r(n)$ azt a legkisebb számot, hogy minden $G^{(n)}_{h_r(n)}$ tartalmaz egy K kört, s egy x_0 pontot, mely legalább r éllel van összekötve a K kör $x_1, \dots, x_r$ pontjaival. $r \geqq 3$ esetén egyelőre nem tudjuk $h_r(n)$-et meghatározni, s így csak $h_2(n)$-nel foglalkozunk. Triviális mindenesetre, hogy $h_2(n) \geqq f(n)$, tudniillik az x_1, x_2 pontokat nyilván három független úttal lehet összekötni (két út a K kör éleiből áll, s a harmadik út az (x_1, x_0) és (x_0, x_2) élekből). PÓSA sejtette[5], hogy $h_2(n)=f(n)$, s a továbbiakban PÓSA e sejtésére két bizonyítást fogunk adni.

Megjegyezzük még, hogy PÓSA [6] a következő érdekes tételt bizonyította be: Minden $G^{(n)}_{2n-3}$ tartalmaz egy olyan kört, melynek két (nem szomszédos) pontja egy éllel van összekötve (azaz gráfunk tartalmaz egy poligont egy átlójával). Viszont létezik oly $G^{(n)}_{2n-4}$, mely nem tartalmaz ily kört.

Bizonyítás nélkül említjük még a következő tételt: Legyen $n \geqq 6$, akkor minden

$$G^{(n)}_l, \quad l=\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$$

tartalmaz oly teljes topologikus négyszöget, melynek öt összekötő útja él s a hatodik két élből áll. Könnyű belátni, hogy ez nem igaz mindegyik $G^{(n)}_{l-1}$-re és így e tétel nem javítható.

TÉTEL.

$$h_2(n)=f(n).$$

Nyilvánvaló, $h_2(n)$ és $f(n)$ definíciójából, hogy $h_2(n) \geqq f(n)$, s így csak azt kell bebizonyítanunk, hogy minden $G^{(n)}_{f(n)}$ tartalmaz egy K kört, s egy x_0 pontot, mely nincs a K körön, s melyből legalább két él vezet a K körhöz.

Erre a tételre fogunk két bizonyítást adni.

Az első bizonyítás (épp úgy, mint a második) teljes indukciót használ. Ha a G gráf tartalmaz egy kört s egy pontot, mely nincs a körön, s mely legalább két éllel van a kör pontjaival összekötve, röviden azt fogjuk mondani, hogy a G gráf tartalmaz *alakzatot*.

Indukciós feltevésünk mármost a következő:

Legyen $4 \leqq m < n$. Minden $G^{(m)}_{f(m)}$ tartalmaz alakzatot. Ha m páratlan, akkor minden $G^{(m)}_{f(m)-1}$ vagy tartalmaz alakzatot, vagy minden él előfordul egy háromszögben.

Könnyű belátni, hogy $n=4$-re indukciós feltevésünk teljesül (ti. $f(4)=5$). Ezért, hogy tételünket bebizonyítsuk, csak annyit kell kimutatn nk, hogy indukciós feltevésünkből következik, hogy minden $G^{(n)}_{f(n)}$ tartalmaz alakzatot, s ha n páratlan, akkor minden $G^{(n)}_{f(n)-1}$ tartalmaz alakzatot vagy minden él előfordul legalább egy háromszögben.

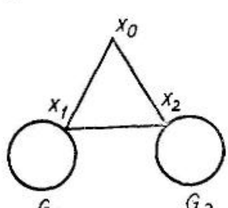
Elsősorban feltehetjük, hogy a $G^{(n)}_{f(n)}$, és páratlan n esetén a $G^{(n)}_{f(n)-1}$ gráf nem tartalmaz elsőfokú pontot; ha ugyanis ily pont létezne, ennek elhagyása után nyilván egy $G^{(n-1)}_{l}$, $l \geqq f(n-1)$ maradna, mely indukciós feltevésünk szerint tartalmaz alakzatot, s így az eredeti gráf is tartalmaz alakzatot.

Viszont feltehetjük, hogy a $G^{(n)}_{f(n)}$, és páratlan n esetén a $G^{(n)}_{f(n)-1}$ gráf is tartalmaz másodfokú szögpontot. Ha ugyanis $G^{(n)}$ gráfunk minden szögpontja legalább harmadfokú volna, akkor $G^{(n)}$ gráfunknak legalább $\frac{3n}{2}$ éle volna, ami $\frac{3n}{2} > f(n)$ miatt lehetetlen.

Tegyük fel először, hogy $n=2u+1$. Először bebizonyítjuk indukciós feltevésünkből, hogy minden $G^{(2u+1)}_{3u+1}$ tartalmaz alakzatot. Legyen ugyanis x_0 gráfunknak másodfokú szögpontja. Hagyjuk el x_0-t, s a belőle kifutó két élt, ekkor egy $G^{(2u)}_{3u-1}$-et nyerünk, mely indukciós feltevésünk miatt tartalmaz alakzatot $(f(2u)=3u-1)$.

Nehezebb lesz indukciós feltevésünk második állításának bebizonyítása, amely szerint minden $G^{(2u+1)}_{3u}$ vagy tartalmaz alakzatot vagy minden éle előfordul háromszögben.

Elsősorban is feltehetjük, hogy $G^{(2u+1)}_{3u}$ nem tartalmaz alakzatot (különben nincs mit bebizonyítanunk). Legyen x_0 gráfunk másodfokú pontja, s tegyük fel, hogy x_0 az x_1 és x_2 pontokkal van élekkel összekötve. Tegyük fel először, hogy az (x_1, x_2) él előfordul gráfunkban. Ekkor azonban x_1-ből nem vezet x_2-be oly, az (x_1, x_2) éltől különböző út, mely nem megy át az x_0 ponton (különben gráfunkban lenne alakzat). Tehát gráfunk így ábrázolható:



1. ábra

G_1-ben vannak $G^{(2u+1)}_{3u} - x_0$ azon pontjai, melyek nem köthetők össze x_2-vel oly úttal, mely nem megy át x_1-en.

Tegyük fel először, hogy $\pi(G_1)=2t$, $\pi(G_2)=2u-2t$. Ez azonban lehetetlen, mert indukciós feltevésünk szerint (különben G_1 vagy G_2 tartalmazna alakzatot)

$$v(G_1) \leqq 3t-2, \qquad v(G_2) \leqq 3u-3t-2,$$

tehát

$$\nu(G_{3u}^{(2n+1)})=3+\nu(G_1)+\nu(G_2)\leqq 3+3t-2+3u-3t-2=3u-1,$$

ami lehetetlen.

Feltehetjük tehát, hogy

$$\pi(G_1)=2t+1,\quad \pi(G_2)=2u-2t-1,\quad 0<t<u.$$

Indukciós feltevésünk miatt (különben van alakzat)

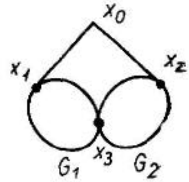
(1) $$\nu(G_1)\leqq 3t,\quad \nu(G_2)\leqq 3u-3t-3.$$

(1)-ben azonban mindkét helyen egyenlőség áll (különben megint $\nu(G_{3u}^{(2u+1)})<3u$), ekkor azonban indukciós feltevésünk szerint G_1 és G_2 minden éle valamelyik háromszögben előfordul. De ekkor az I. ábra miatt $G_{3u}^{(2u+1)}$ minden éle előfordul valamelyik háromszögben, s ezzel esetünkben állításunk be van bizonyítva.

Feltehetjük tehát, hogy gráfunkban az (x_1, x_2) él nem fordul elő. Először igazoljuk, hogy a $G'=G_{3u}^{(2u+1)}-x_0$ gráf összefüggő. Ha ugyanis nem lenne az és G_1' G'-nek tetszőleges komponense, G_2' pedig G'-nek a G_1-hez nem tartozó pontjaiból és éleiből álló gráf, akkor indukciós feltevésünk szerint

$$\nu(G_{3u}^{(2u+1)})=3u\leqq 2+\nu(G_1')+\nu(G_2')\leqq 3u-1.$$

Ez pedig lehetetlen. Feltehetjük, hogy a G' gráfban nincs oly kör, mely az x_1 és x_2 pontokat tartalmazza (különben $G_{3u}^{(2u+1)}$-ben volna alakzat). Ekkor azonban egy ismert tétel szerint a G' gráfnak van artikulációja, azaz olyan x_3 pontja, hogy minden, az x_1-ből x_2-be vezető út átmegy x_3-on. (azaz x_3 G'-nek elválasztó pontja, artikulációja).



2. ábra

Létezik G'-ben két olyan összefüggő G_1 és G_2 részgráf, melyeknek egyetlen közös pontjuk x_3, G_i $(i=1,2)$ tartalmazza az x_i pontot és G_1-x_3 pontjait nem köti össze G'-beli él G_2-x_3 pontjaival. Nyilván

(2) $$\pi(G_1)+\pi(G_2)=2u+1.$$

(2) miatt feltehetjük, hogy

(3) $$\pi(G_1)=2t,\quad \pi(G_2)=2u-2t+1.$$

Indukciós feltevésünk miatt (különben $G_{3u}^{(2u+1)}$-ban volna alakzat)

(4) $$\nu(G_1)\leqq 3t-2,\quad \nu(G_2)\leqq 3u-3t.$$

Feltehetjük, hogy (4)-ben mindkét helyen az egyenlőség jele áll (különben $\nu(G_{3u}^{(2u+1)})<3u)$. Ez azonban nyilván csak úgy lehetséges, hogy G_2 minden éle G_2-nek valamelyik háromszögében előfordul.

Tekintsük mármost az x_0, x_1, x_3, x_2 pontokat tartalmazó K kört. A G_2-ből K tartalmazza az e_1 élt. e_1 előfordul egy G_2-beli háromszögben. Ennek élei legyenek e_1, e_2, e_3. Ha ezen élekből K csak az e_1-et tartalmazza, akkor K, e_2, e_3 alakzatot alkotnak, ha e_1-et és e_2-t tartalmazza, akkor K, e_3 alkotnak alakzatot, s ez már az összes lehetséges eset, mert K az e_1, e_2, e_3 éleket egyszerre nyilván nem tartalmazhatja. Tehát feltevésünkkel ellentmondásra jutottunk, s ezzel az $n=2u+1$ esetre bizonyításunkat befejeztük.

Tegyük fel mármost, hogy $n=2u$. Indukciós feltevésünk segítségével be fogjuk bizonyítani, hogy minden $G_{3u-1}^{(2u)}$ tartalmaz alakzatot.

x_0, x_1, x_2 jelentése ugyanaz, mint az $n=2u+1$ esetben. Megint két esetet különböztetünk meg. Tegyük fel először, hogy az (x_1, x_2) él előfordul gráfunkban. Mint az $n=2u+1$ esetben, úgy itt is (az 1.-es ábra esetében vagyunk) feltehetjük az általánosság rovása nélkül, hogy $\pi(G_1)=2t$, $\pi(G_2)=2u-2t-1$, ezért indukciós feltevésünkből nyerjük, hogy

$$\nu(G_{3u-1}^{(2u)})=3+\nu(G_1)+\nu(G_2)=3u-1\leqq 3+3t-2+3u-3t-3=3u-2,$$

ami ellentmondás.

Tehát feltehetjük, hogy (x_1, x_2) nem fordul elő gráfunkban. Ugyanúgy, mint az $n=2u+1$ esetben, nyerjük, hogy a $G_{3u-1}^{(2u)}-x_0$ gráfnak van egy x_3 artikulációs pontja (lásd 2. ábra). Megint két esetet kell megkülönböztetnünk. Az első esetben

$$\pi(G_1)=2t, \quad \pi(G_2)=2u-2t. \tag{5}$$

(5) azonban azonnal ellentmondásra vezet, mert indukciós feltevésünk miatt

$$\nu(G)=3u-1=2+\nu(G_1)+\nu(G_2)\leqq 2+3t-2+3u-3t-2=3u-2,$$

ami lehetetlen.

Tegyük fel tehát végül, hogy

$$\pi(G_1)=2t+1, \quad \pi(G_2)=2u-2t-1. \tag{6}$$

$$\nu(G)=3u-1=2+\nu(G_1)+\nu(G_2)$$

miatt ez csak akkor nem vezet ellentmondásra (vagy alakzat létezésére), ha

$$\nu(G_1)=3t, \quad \nu(G_2)=3u-3t-3.$$

Ez esetben azonban G_1 és G_2 minden éle előfordul egy háromszögben és alakzat létezését az $[x_0, x_1, x_3, x_2]$ kör létezéséből ugyanúgy nyerjük, mint $\pi(G)=2u+1$ esetben. Ezzel tételünk igazolva van.

Megjegyezzük, hogy módszerünkkel könnyen nyerhető, hogy ha $G_{3u}^{(2u+1)}$ nem tartalmaz alakzatot, akkor csupa háromszögből áll, melyek artikulációkkal kapcsolódnak egymáshoz.

A tételünkre adott második bizonyítás a következő:

Mint az első bizonyításban, nevezzük most is „alakzatnak" az olyan részgráfot, amely egy körből és egy körön kívüli pontból a kör két különböző pontjához futó élből (röviden körből és fülből) áll.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ha $G_k^{(n)}$-ban nincs alakzat, akkor $k \leqq f(n)-1=\left[\frac{3(n-1)}{2}\right]$.

Az állítás $n=1, 2$-re fennáll.

Tegyük fel, hogy igaz $(n-1)$-ig. Indirekt módon bizonyítjuk, hogy ekkor n-re is fennáll.

Ha ui. ez nem igaz, akkor van olyan G gráf, melyre $\pi(G)=n$, $\nu(G)=\left[\frac{3(n-1)}{2}\right]+1$ és melyben nincs alakzat.

(7) G összefüggő és nem lehet elválasztó pontja. Ugyanis, ha volna G-ben két olyan G_1 és G_2 részgráf, melyeknek legfeljebb egy közös pontjuk van és amelyek együtt G minden élét tartalmazzák, akkor a $\pi(G_1)=k_1$, $\pi(G_2)=k_2$ jelöléssel az indukciós feltevés miatt G-nek legfeljebb

$$\left[\frac{3(k_1-1)}{2}\right]+\left[\frac{3(k_2-1)}{2}\right] \leqq \left[\frac{3(k_1+k_2-2)}{2}\right] \leqq \left[\frac{3(n-1)}{2}\right]$$

éle lehetne.

G-ben van másodfokú pont, hiszen az előbbiek szerint elsőfokú nem lehet benne, s nem lehet mindegyik legalább harmadfokú sem, mert G éleinek száma $\left[\frac{3(n-1)}{2}\right]+1=\left[\frac{3n-1}{2}\right]<\left[\frac{3n+1}{2}\right]$.

G-ben nem lehet két másodfokú pont éllel összekötve. Ugyanis, ha x_1 és x_2 ilyen pontok lennének, akkor $G'=G-\{x_1, x_2\}$-re $\pi(G')=$ $=n-2$ és $\nu(G')=\nu(G)-3=\left[\frac{3(n-3)}{2}\right]+1$ lenne, tehát indukciós feltevésünk szerint G', s így G is tartalmazna alakzatot.

Válasszuk ki G egyik másodfokú pontját: jelöljük x-szel, a rá illeszkedő két él másik végpontját pedig y_1 és y_2-vel. A $G-x=G'$ gráfban nem lehet két egymást nem metsző (azaz közös belső pontot nem tartalmazó) y_1y_2-út, különben G-ben lenne alakzat. G' tehát nem tartalmazhatja az (y_1, y_2) élt, mert akkor y_1 és y_2 is elválasztó pontja volna G-nek. Ezért Menger tétele szerint van G'-ben az y_1 és y_2 pontokat elválasztó x_0 pont (artikuláció). Csak egy ilyen pont létezhet. Megmutatjuk ugyanis, hogy létezik G'-ben két egymást nem metsző x_0y_i-út ($i=1, 2$). E célból tegyük fel, hogy pl. $i=1$-re nem létezne két ilyen út. Ekkor két eset lehetséges:

a) Van G'-ben az y_1 és x_0 pontokat elválasztó pont. Ez azért vezet ellentmondásra, mert akkor a G' gráfot az (y_1, y_2) éllel bővítve olyan $n-1$ pontú gráfot kapnánk, melyben nem lenne alakzat. (Hiszen, ha lenne, ebben az (y_1, y_2) él csak a fül egyik éle lehetne, különben G-ben is volna alakzat. A fül másik élét, és az alakzat körének a fül végpontjai által meghatározott ívét tekintve G' két olyan y_1y_2-útját kapnók, melyeknek csak egy közös belső pontjuk volna.) Ez azonban az indukciós feltevés szerint lehetetlen, mert ezen új gráf éleinek száma $\left[\frac{3(n-1)}{2}\right]$.

b) Létezik G'-ben az (x_0, y_1) él és ezen kívül nincs más x_0y_1-út G'-ben. Ekkor y_1 G-nek csak másodfokú pontja lehet (különben y_1 G-nek elválasztó pontja volna). Ez azért lehetetlen, mert x_0 és y_1 éllel összekötött másodfokú pontok lennének.

Az elmondottak szerint

(8) G bármelyik x másodfokú pontjához egyértelműen hozzátartozik $G-x$-nek egy olyan x_0 pontja, amely az x-hez illeszkedő élek x-től különböző y_1 és y_2 végpontjait $G-x$-ben elválasztja, és létezik $G-x$-ben két egymást nem metsző x_0y_i-út ($i=1, 2$). Az x_0 pontot x *konjugáltjának* nevezzük.

G most meghatározott tulajdonságai alapján bizonyítjuk, hogy

$$v(G) \geqq \left[\frac{3n+1}{2}\right],$$

s ez ellentmondás, hiszen

$$v(G) = \left[\frac{3n-1}{2}\right],$$

Elegendő kimutatnunk, hogy ha x_0 az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ másodfoku pontok konjugáltja és ezen pontokon kívül nincs más olyan másodfokú pont G-ben, amelynek x_0 konjugáltja volna, akkor az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ pontok fokának átlaga legalább 3, azaz a pontok fokának összege legalább $3(k+1)$.

A $G_0=G-x_0$ gráf összefüggő, hiszen G-nek nincs elválasztó pontja. Jelöljük az x_i-hez ($i=1, 2, \ldots, k$) illeszkedő két él alkotta utat α_i-vel, és nevezzük az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ utakat α-utaknak.

Legyen $G'=G_0-\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, vagyis hagyjuk el G_0-ból az α-utakat, s jelöljük G' komponenseit $G_1, G_2, \ldots, G_l$-lel. G' szerkezetéről a következőket állapíthatjuk meg:

a) Egy α_j út két végpontja nem lehet ugyanazon G_i komponensben, mert ha igen, akkor e két pontot x_0 nem választaná el $G-x_j$-ben.

b) Nem létezhet a G_i komponenseknek olyan G_{r_1} $G_{r_2}, \ldots, G_{r_s}=G_{r_1}$ sorozata sem, melyben a G_{r_j} és $G_{r_{j+1}}$ $(j=1, 2, \ldots, s-1)$ komponenseket G-ben egy-egy α-út köti össze. Ha ui. lenne ilyen sorozat, a komponensek összefüggő volta miatt lenne G_0-ban olyan kör, melyben α-utak is szerepelnek, s ez x_0 definíciója miatt ugyancsak lehetetlen.

c) Minden G_i $(i=1, 2, \ldots, l)$ komponensben legalább egy α-út végződik, hiszen G_0 már összefüggő.

Ezen három tulajdonságból az adódik, hogy ha a G_i komponenseket pontokká, az α-utakat pedig élekké zsugorítjuk össze, akkor G_0-ból egy *fa* keletkezik. Ebből következik, hogy $l=k+1$.

Ha G' valamely G_i komponensében csak egy α-útnak, pl. α_1-nek van végpontja, akkor G-ben az x_0 pontot legalább két él köti össze G_i-beli pontokkal. Ha ui. α_1-nek G_i-ben levő végpontját y-nal jelöljük, (8) szerint legalább két, x_1-en át nem menő, egymást nem metsző x_0y-út van, s mivel ezen utak pontjai x_0 kivételével G_i-ben vannak, x_0-ból valóban legalább két él fut G_i-hez.

Ha G' valamely G_i komponensében pontosan két α-útnak, pl. α_1 és α_2-nek van végpontja, akkor G-ben x_0-t legalább egy él köti össze G_i-beli ponttal. Hiszen ha nem lenne ilyen él, $G-x_1$-ben α_1 két végpontját összekötő utak x_0-on kívül még x_2-n is átmennének, s ez (8) szerint nem állhat fenn.

Ezen két utóbbi állítás felhasználásával x_0 fokszámára alsó becslést adunk:

Ha v_i-vel jelöljük G' olyan komponenseinek számát, amelyekbe i számú α-útnak esik végpontja, akkor x_0 fokszáma legalább $2v_1+v_2$. Másrészt

$$l=k+1=v_1+v_2+\ldots+v_m$$

és

$$2k=v_1+2v_2+\ldots+mv_m,$$

Ezekből

$$k+3=2v_1+v_2-v_4-2v_5-\ldots-(m-3)v_m,$$

s így

$$2v_1+v_2\geqq k+3.$$

Az x_0 pont fokszáma ennélfogva legalább $k+3$, s így az $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pontok fokának összege legalább $3k+3$.

Ezzel bizonyításunkat befejeztük.

IRODALOM

[1] TURÁN PÁL, Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, Mat. és Fiz. Lapok, **48 (1941)**, 436–452.
[2] P. ERDŐS and T. GALLAI, On maximal paths and circuits of graphs, Math. Acad. Sci. Hung. Acta **10** (1959) 337–356.
[3] BÁRTFAI, P.: Schweitzer verseny megoldás (Erdős gráffeladatára) Mat. Lapok **11** (1960) 175–176 o.
[4] G. DIRAC, In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen Mathematische Nachrichten, **22**, (1960) 61–85. lásd még Erdős-Pósa cikk, ibid. 2.
[5] Szóbeli közlés.
[6] Math. Lapok, 127. feladat. XII- (1961) p. 254.
[7] K. CORRÁDI and A. HAJNAL, On maximal number of independent circuits of graphs, Math. Acad. Sci Hung. Acta (sajtó alatt).
[8] P. ERDŐS and L. PÓSA, On the maximal number of disjoint circuits of a graph. Math. (Sajtó alatt).
[9] G. DIRAC and P. ERDŐS, On the maximal number of independent circuits in a graph, Math. Acad. Sci. Hung. Acta (sajtó alatt).

О ЗАДАЧАХ, ОТНОСЯЩИХСЯ К ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ В ТЕОРИИ ГРАФОВ

Б. Боллобаш, П. Эрдёш

Пусть $G_k^{(n)}$ означает граф, состоящий из n вершин и k рёбер такой, что в нём отсутствуют петли и двойные рёбра.

В статье рассматриваются определения минимальных значений $k = g(n)$ таких, что все графы $G_{g(n)}^{(n)}$ содержат определённые подграфы с предписанными свойствами. В ней приведены два доказательства следующей теоремы, предполагаемой Лайошем П о ш а:

Пусть $f(2m) = 3m - 1$ и $f(2m+1) = 3m + 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Каждый $G_{f(n)}^{n}$ $(n \geqq 4)$ содержит такой подграф, который состоит из одного круга K, из одной вершины x не лежащей на K и из двух рёбер, связывающих вершину x с двумя вершинами круга K.

ÜBER GRAPHENTHEORETISCHE EXTREMALPROBLEME

B. BOLLOBÁS UND P. ERDŐS

Es bezeichne $G_k^{(n)}$ einen solchen Graphen, der aus n Knotenpunkten und k Kanten besteht, und der keine Schlingen und mehrfache Kanten enthält. Die Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung solcher minimalen $g(n)$ Werte, für die der Graph $G_{g(n)}^{(n)}$ stets Teilgraphen mit gewissen vorgeschriebenen Eigenschaften enthält. Die Arbeit enthält zwei Beweise für den folgenden, von L. PÓSA vermuteten Satz:

Es sei $f(2m) = 3m - 1$, $f(2m+1) = 3m + 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Der Graph $G_{f(n)}^{(n)}$ $(n \geqq 4)$ enthält stets einen solchen Teilgraphen, der aus einem Kreis K, aus einem nicht auf K liegenden Knotenpunkt x und aus zwei solchen Kanten besteht, die x mit zwei Knotenpunkten von K verbinden.