ВЪРХУ НЯКОИ ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ*

*Паул Ердьош***

В тази статия разглеждам някои решени и нерешени геометрични задачи с комбинаторен характер, с които съм се занимавал много през последните тридесет години. Други подобни задачи читателят може да намери в наскоро излязлата работа [2] на Хадвигер и Дебрунер.

1. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са n различни точки в равнината. Да разгледаме възможните разстояния $\overline{x_i, x_j}$, $1 \leq i < j \leq n$ между тях, които са $^1/_2\, n(n-1)$ на брой. С $D(x_1, \ldots, x_n)$ да означим броя на различните измежду числата $\overline{x_i, x_j}$. По-нататък нека

$$f(n) = \min_{x_1, \ldots, x_n} D(x_1, \ldots, x_n).$$

В моята работа [3] се доказва, че

$$\sqrt{n-1} - 1 < f(n) < c_1\, n/\sqrt{\log n}. \tag{1}$$

Горната граница се получава от квадратната целочислена решетка, но като се използува дълбоката теорема на Ландау, че броят на числата, ненадминаващи x, които могат да се представят като сума на два квадрата, е по-малък от $cx/\sqrt{\log x}$. Мозер [4] подобри долната граница на $^1/_2\, n^{2/3}\, q^{-1/3} - 1$ Изглежда обаче сигурно, че $f(n) > n^{1-\varepsilon}$ за всяко $\varepsilon > 0$ и $n > n_0(\varepsilon)$. Може би дори е в сила неравенството $f(n) > c_2\, n/\sqrt{\log n}$.

Да означим с $d(x_i)$ броя на различните измежду числата $\overline{x_i, x_j}$, $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$. В поменатата си работа Мозер доказа неравенството

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i) > \frac{n^{2/3}}{2q^{1/3}} - 1$$

за произволно разпределение на точките $x_1, \ldots, x_n$. Може би е вярно дори неравенството

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i) < c_3\, n/\sqrt{\log n}.$$

Една следваща задача би била оценката на $\sum_{i=1}^{n} d(x_i)$. Аз успях да докажа само неравенството $\sum_{1}^{n} d(x_i) > {}^1/_2\, n^{3/2}$. Изглежда обаче, че долната граница може да се подобри на $c_4\, n^2/\sqrt{\log n}$.

Ако точките $x_1, \ldots, x_n$ образуват изпъкнал многоъгълник, аз изказах предположението, че $f(n) \geqq [n/2]$; равенство имаме само за правилни многоъгълници. Преди няколко месеца това предположение бе доказано от Алтман***. Той доказа дори, че за нечетно n равенството е възможно само

* Доклад, изнесен в София на 27. II. 1962 г. пред студентите по математика от ФМФ. Голяма част от доклада се съдържа в [1], вж. също [30].

** Paul Erdős, член на Унгарската академия на науките в Будапеща.

*** Неговата работа ще излезе от печат в *Amer. Math. Monthly*.

за правилен многоъгълник. По-нататък аз изказах предположението, че във всеки изпъкнал многоъгълник има такъв връх, от който да не са равноотдалечени никои три върха на многоъгълника. Това предположение обаче наскоро бе опровергано от Данцер за $n=9$*. Тук бихме могли да поставим още следния въпрос: съществува ли такова цяло число l (поради теоремата на Данцер, $l \geqq 3$), че във всеки изпъкнал n-ъгълник да има връх, от който не са равноотдалечени кои да са $l+1$ на брой други върхове? Ако отговорът на този въпрос би бил отрицателен, можем да се запитаме как расте l като функция на n.

По всяка вероятност е вярна следната теорема, която е по-силна от теоремата на Алтман, но не се опровергава от противопримера на Данцер: във всеки изпъкнал n-ъгълник винаги има такъв връх x_i, че измежду числата $\overline{x_i, x_j}$, $1 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$ поне $[n/2]$ да бъдат различни.

Мозер и аз доказахме, че в един изпъкнал $3n+1$-ъгълник може да има $5n$ двойки от негови върхове, между които разстоянието е едно и също. Това се вижда така: нека $x_0, x_1, \ldots, x_{3n}$ са върховете; $x_1, \ldots, x_n$ лежат върху горната половина на единичната окръжност, x_0 е центърът ѝ, а дъгите (x_i, x_{i+n}) и (x_{i+n}, x_{i+2n}), $1 \leqq i \leqq n$ са по-малки от $\pi/6$. Очевидно разстоянието единица се среща $5n$ пъти. Вероятно този резултат може да се усили, но ние не успяхме да покажем дори съществуването на такава абсолютна константа c, за която да може да се твърди, че едно и също разстояние се повтаря най-много cn пъти.

Преди няколко седмици Б. Грюнбаум постави задачата да се намери или поне оцени стойността на $f(n)$ за случая на изпъкнали многостени. Както изглежда, това не е лесно. Правилната пирамида ни дава неравенството $f(n) \leqq [{}^1/_2\, n-1]$, обаче додекаедърът и икосаедърът ни карат да предположим, че вероятно $f(n)$ е много по-малко.

Нека се откажем сега от предположението, че нашите n точки образуват изпъкнал многоъгълник. Квадратната решетка показва, че в равнината можем да си зададем n точки така, че за всяка точка да съществуват $[n^{c_5/\log \log n}]$ на брой равноотстоящи от нея точки. (При доказателството на този факт се използуват познати теореми от аналитичната теория на числата, отнасящи се за броя на решенията на уравнението $x^2+y^2=m$.) Не е изключено тази граница, общо взето, да е точна. Нека $g(x_i)$ е максималният брой на точките, равноотдалечени от x_i. Може да очакваме, че съществува такава абсолютна константа c_6, че за всяка n-торка от точки в равнината да имаме

$$\min_{1 \leqq i \leqq n} g(x_i) < n^{c_6/\log \log n}. \tag{3}$$

За съжаление засега мога да докажа само твърде по-слабото неравенство

$$\min_{1 \leqq i \leqq n} g(x_i) < n^{2/3}+2. \tag{4}$$

Доказателството е съвсем просто. От дефиницията на $g(x_i)$ следва, че съществува окръжност с център x_i, върху която лежат $g(x_i)$ на брой от точките x_j, $1 \leqq j \leqq n$. Тъй като обаче една тройка точки може да лежи най-много върху една такава окръжност, веднага получаваме

* Неговото доказателство още не е публикувано.

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{g(x_i)}{3} \leq \binom{n}{3},$$

т. е. $n\binom{y}{3} \leq \frac{n}{3}$, $y = \min\limits_{1 \leq i \leq n} g(x_i)$, откъдето (4) се получава с лесни пресмятания.

Нека сега $x_1, \ldots, x_n$ са точки в k-мерното пространство. Целочислената решетка показва, че $f_k(n) < c_k n^{2/k}$ (дефиницията на $f_k(n)$ в k-мерното пространство е същата, както дефиницията на $f(n)$ в равнината, следователно $f_2(n) = f(n)$). В това неравенство вероятно е постигнат вече правилният порядък, т. е. вероятно е в сила неравенството $f_k(n) > c'_k n^{2/k}$. Това е сигурно тъй за $k = 1$, тъй като върху правата е тривиално, че $f_1(n) = n-1$.

В k-мерното пространство е очевидно, че $f_k(k+1) = 1$, но $f_k(k+2) = 2$. Преди няколко години Кели (Kelly) постави задачата да се намери най-малкото l_k, за което $f_k(l_k) > 2$. Коксетер показа, че $l_k > {}^1/_2\, k(k+1)$, като разгледа върховете на k-мерния симплекс и средите на неговите ръбове. В моята работа [1] аз твърдях, че е в сила неравенството $l_k < k^c$. За съжаление това съвсем не е вярно. Моето доказателство водеше само до много по-слабия резултат $l_k < \exp(k^{1-c_7})$.

Нека в равнината са дадени n точки, за които $\max\limits_{1 \leq i < j \leq n} \overline{x_i, x_j} = 1$ (следователно диаметърът на това множество е равен на единица). Ерика Панвиц [5] показа, че съществуват най-много n двойки точки с разстояние единица. Преди около двадесет и пет години А. Важони допусна, че в тримерното пространство разстоянието единица може да се получи най-много за $2n-2$ на брой двойки точки (лесно е да се види, че числото $2n-2$ наистина се достига). Преди няколко години Б. Грюнбаум [6], А. Хепеш [7] и С. Страшевич [8] независимо един от друг почти едновременно и по един и същ начин доказаха предположението на Важони.

При четиримерното пространство работата стои другояче. Ленц показа, че в четиримерното пространство има съвкупност от n точки с диаметър единица, за която съществуват $[n^2/4] + c_8 n$ на брой двойки от точки с $\overline{x_i, x_j} = 1$. По-общо, нека $x_1, \ldots, x_n$ е една съвкупност от точки в k-мерното пространство, имаща диаметър единица. Да означим с $f(k, n)$ максималния брой на двойките точки, за които $\overline{x_i, x_j} = 1$, а с $F(k, n)$ да означим максималния брой на двойките точки, за които $\overline{x_i, x_j}$ има все една и съща стойност (очевидно $f(k, n) \leq F(k, n)$). В [9] аз доказах, че за $k \geq 4$ имаме

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} f(k, n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} F(k, n) = \frac{1}{2} - \left[\frac{k}{2}\right]^{-1}.$$

Точните стойности обаче са неизвестни както за $f(k, n)$, така и за $F(k, n)$.

За $k = 1$ тривиално имаме $f(1, n) = 2$, $F(1, n) = 1$; за $k = 2$ и 3, както вече споменахме, са в сила равенствата $F(2, n) = 2$, $F(3, n) = 2n-2$. В [2] и [9] доказах неравенствата

$$n^{1 + c_9/\log\log n} < f(2, n) < n^{3/2}, \quad c_{10} n^{3/2} \log\log n < f(3, n) < c_{11} n^{5/3}.$$

Да споменем още прочутото предположение на Борсук, според което всяка точкова съвкупност от k-мерното пространство, имаща диаметър единица, може да се представи като теоретико-множествена сума на $k+1$ на брой съвкупности с по-малък диаметър. За $k=1$ това е тривиално, при $k=2$ е едно леко упражнение. При $k=3$ този факт бе доказан от Еглестън [10] и по-късно, много по-просто, от Грюнбаум [11] и Хепеш [12].

Нека $x_1, \ldots, x_n$ са отново n точки в равнината. Да допуснем сега, че имаме

$$\min_{1 \leq i < j \leq n} \overline{x_i, x_j} = 1.$$

Колко двойки точки може да има, за които $\overline{x_i, x_j} = 1$? Лесно се вижда [2] че такива двойки има най-много $3n$ на брой и че тази горна граница може да се подобри на $3n - c_{12}\sqrt{n}$. Триъгълната решетка обаче показва, че наистина могат да съществуват $3n - c_{13}\sqrt{n}$ на брой двойки. Струва ми се, че когато броят на точките е $3m^2+3m+1$, максималният брой на двойките с $\overline{x_i, x_j} = 1$ е $9m^2+9m$. Тази граница се достига за точките от триъгълната решетка, изпълнена от правилни триъгълници с дължина на страната, равна на m. Подобни въпроси за пространства с по-голям брой измерения още не са разглеждани.

Ще казваме, че една съвкупност от точки има свойството T, ако разстоянията на произволни двойки точки от тази съвкупност са различни. Лесно се вижда, че произволни n точки върху правата винаги съдържат подсъвкупност със свойството T, съдържаща поне $[n^{1/3}]$ точки. Вероятно тази оценка може да се подобри на $(1+o(1))\sqrt{n}$, но тя сигурно не може да бъде $(1+c)\sqrt{n}$ с $c>0$. Този въпрос естествено може да се постави и за k-мерното пространство ($k>1$), за който случай аз мога да покажа само, че винаги съществува подсъвкупност със свойството T, имаща $[n^{c_k}]$ точки, но не мога да определя точния степенен показател за нито едно $k \geqq 1$.

Нека в k-мерното пространство ни е дадена една точкова съвкупност с мощност $\mathfrak{M}$. В [13] показах, че тя винаги съдържа една подсъвкупност, пак с мощност $\mathfrak{M}$, но имаща свойството T (доказателството не използува Канторовата* хипотеза). Какутани, Окстоби и аз доказахме [14], че за Хилбертовото пространство това твърдение не е вярно. Какутани и аз [15] показахме, че Канторовата хипотеза е равносилна на твърдението, че правата може да се представи като теоретико-множествена сума на изброимо много съвкупности, имащи свойството T. Наскоро успях да докажа това за случая на k-мерното пространство**.

Следната интересна задача бе поставена от един американски колега, чието име не мога да установя. Той предполага, че равнината може да се разложи на четири подсъвкупности, нито една от които не съдържа две точки с разстояние единица. Лесно се вижда, че три съвкупности с това свойство няма. Това бе доказано от Мозер и доказателството предоставяме на остроумието на читателя. Същият въпрос може да бъде поставен и за k-мерното пространство и пак лесно се вижда, че за него няма $k+1$ подсъвкупности с това свойство. От една теорема, доказана от де Брюйн и от мене, следва, че би било достатъчно да се реши задачата за крайни подсъвкупности на равнината или на k-мерното пространство [16].

* Канторова (по името на Георг Кантор, 1845—1918) се нарича хипотезата за континуума. *Бел. прев.*

** Този резултат още не е публикуван.

В тази насока могат да бъдат поставени още много други комбинаторно-геометрични задачи. Тук ще споменем още няколко. Ще казваме, че една точкова съвкупност има свойството T', ако тя не съдържа три точки, образуващи равнобедрен триъгълник. Всяка съвкупност, имаща свойството T, има и свойството T', но не и обратно. Колко големи, т. е. от какъв брой точки, са съвкупностите със свойство T', които трябва да съдържа една съвкупност от n точки в k-мерното пространство? На пръв поглед този въпрос ни се струва неинтересен и неестествен. Изглежда обаче, че това не е така, тъй като за $k=1$ и n равноотстоящи точки нашият въпрос се свежда до следната позната задача от теорията на числата: какъв е максималният брой на числата в интервала $(1, n)$, несъдържащи една тричленна аритметична прогресия [17]? Преди около 15 години* доказах, че седем точки в равнината винаги съдържат един неравнобедрен триъгълник (т. е. една съвкупност от три точки със свойството T'). Правилният петоъгълник и неговият център показват обаче, че за шест точки това не е вярно. Подобната задача при $k=3$ не ми се удаде да реша.

Нека са дадени n точки в k-мерното пространство. Какъв е максималният брой на определените от тия точки равнобедрени или равностранни триъгълници? За равностранни триъгълници при $k \geqq 2$ отговорът сигурно ще бъде $c_k n^2$, точната стойност на c_k обаче не умея да определя.

2. Преди около 25 години Блументал постави следния въпрос: нека $A(x_1, \ldots, x_n)$ е най-големият ъгъл $(\leqq \pi)$, определен от точките $x_1, \ldots, x_n$, лежащи в равнината, и нека $\alpha_n = \inf(x_1, \ldots, x_n)$ (inf е разпространен върху всички възможни системи от по n точки) — да се определи или оцени α_n. Секереш [18] доказа, че

$$\alpha_{2^n+1} > \pi\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(2^n+1)^2}\right), \quad \alpha_{2^n} \leqq \pi\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Наскоро Секереш и аз** подобрихме това неравенство на $\alpha_{2^n-1} = \pi(1-1/n)$ и освен това доказахме, че е в сила неравенството $A(x_1, \ldots, x_{2^n}) > \pi(1-1/n)$. Вероятно е вярно и неравенството $A(x_1, \ldots, x_{2^n-1}) > \pi(1-1/n)$, но това не ни се удаде да докажем. За тримерния случай Секереш е дал само твърде груби оценки за α_n.

Аз изказах предположението, че ако в k-мерното пространство са дадени 2^k+1 точки, то те винаги определят един ъгъл $>\pi/2$. За $k=2$ това е тривиално. За $k=3$ това бе доказано от Кайпер и Бьордик. Наскоро Данцер и Грюнбаум*** доказаха общото предположение по удивително прост начин. Крофт [19] пък показа, че ако в тримерното пространство са дадени 6 точки, то най-малко един от ъглите е $\geqq \pi/2$.

3. Клайн доказа, че за всеки пет точки в равнината има четири измежду тях, които образуват изпъкнал четириъгълник. По-нататък тя (Клайн) постави въпроса, дали за всяко n съществува такова най-малко $f(n)$, така че ако са дадени $f(n)$ точки, между тях винаги да може да се намери n-торка, образуваща изпъкнал n-ъгълник. Макай и Туран показаха, че $f(5)=9$, а Секереш и аз доказахме [20], че за всяко n е в сила неравенството $f(n) \leqq C_{2n-4}^{n-2}$. Секереш предположи, че $f(n) = 2^{n-2}+1$ и наскоро ни

* В една задача, публикувана в *Amer. Math. Monthly*.

** Нашата работа бе публикувана напоследък в *Ann. Univ. Budapest*.

*** Работата им е под печат в *Math. Zeitschrift*.

се удаде* да докажем неравенството $f(n) \geqq 2^{n-2}$, но не и равенството $f(n)=2^{n-2}+1$. За тримерното пространство има само съвсем груби оценки.

4. Анинг и аз доказахме [21], че ако за една безкрайна съвкупност от точки в равнината всички възможни взаимни разстояния са целочислени, то точките лежат на една права. Твърдението остава вярно и за k-мерното пространство. Известно е обаче, че съществуват нелинейни точкови съвкупности в равнината, за които възможните разстояния между точките са рационални числа. Засега познатите такива множества са твърде специални. Улам постави въпроса, дали съществуват такива съвкупности, които да са освен това навсякъде гъсти в равнината. Аз предполагам, че такива множества няма [22].

5. В 1933 г. Галай [23] доказа следната теорема: нека в равнината са дадени n точки, нележащи на една права. Тогава винаги има права, която минава през точно две от тия точки. Такава права ще наричаме обикновена права. Тази теорема е изказана още в 1893 г. от Силвестър [24], но не бе доказана и след това е била забравена. В 1933 г., без да зная за работата на Силвестър, аз наново изказах това предположение, което наскоро след това бе доказано от Галай. Теоремата не е чисто комбинаторна, защото съществена роля играе фактът, че точките са в евклидовата равнина. Известно е, че за $n \equiv 1 \pmod 6$ и за $n \equiv 3 \pmod 6$ съществуват такива системи от тройки, при което всяка двойка принадлежи на една и само на една тройка [25]. Въпросът за съществуването на обикновени прави бе поставен и от Моцкин и бе решен (независимо от Галай) през 1939 г. и от Робинзон.

Моцкин постави следния въпрос: нека в k-мерното пространство са дадени n точки, нележащи върху една $(k-1)$-мерна хиперравнина. Определят ли тези точки поне n на брой $(k-1)$-мерни хиперравнини? Тази задача може да се тълкува двояко: от една страна, геометрично и тогава точките ще считаме точки в k-мерното евклидово пространство. От друга страна, можем да мислим, че точките лежат в едно k-мерно проективно пространство. Това второ тълкуване е комбинаторно и така поставената задача естествено съдържа в себе си геометричната и бе решена в 1938 г. от Ханани. Няколко години след това независимо от Моцкин и Ханани де Брюйн и аз [26] решихме комбинаторната задача за $k=2$. С нашия метод на доказателство Моцкин [27] реши комбинаторната задача в положителен смисъл напълно, т. е. за всяко k.

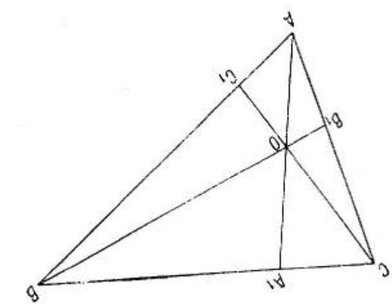
За $k=2$ отговорът на геометричната задача следва веднага от теоремата на Галай и читателят сам би могъл да възстанови доказателството. Мозер и Кели [28] обаче доказаха следната по-дълбока теорема: нека в евклидовата равнина са дадени n точки, никои $n-k$ от които не лежат на една права, и нека $n > {}^1/_2[3(3k-2)^2+3k-1]$. Тогава тези точки определят поне $kn-{}^1/_2(3k+2)(k-1)$ прави. Може би е вярна и следната теорема: съществува такава абсолютна константа c, че ако са дадени n точки в равнината, никои $n-k$ от които не лежат на една права, то те да определят поне ckn прави.

Нека са дадени пак n точки в равнината, нележащи на една права. Да означим с $f(n)$ минималния брой определени от тях обикновени прави. Съгласно теоремата на Галай имаме $f(n) \geqq 1$. Де Брюйн и аз предположихме, че $f(n) \to \infty$. Моцкин го доказа. Мозер и Кели доказаха нера-

* Нашата работа е под печат в *Ann. Univ. Budapest.*

венството $f(n) \geqq [3n/7]$, което за $n=7$ е точно (разгледайте един триъгълник, средите на страните му и центъра на тежестта). За големи стойности на n вероятно е в сила $f(n)=n-1$.

Моцкин [27] изказа следната хипотеза, обобщаваща теоремата на Галай: дадени са n точки в k-мерното евклидово пространство, нележащи на една и съща $k-1$-мерна хиперравнина. Тогава те определят поне една $(k-1)$-мерна хиперравнина със следното свойство: тези измежду n-те точки, които лежат в тази хиперравнина, с изключение на една от тях лежат и в една $(k-2)$-мерна хиперравнина. За $k=2$ това е теоремата на Галай, за $k=3$ е доказано от Моцкин [27]. За $k>3$ въпросът стои открит.



Фиг. 1

Моцкин отбелязва освен това, че за $k=3$ директното обобщение на теоремата на Галай не е вярно. Това директно обобщение би гласяло: дадени са n точки в тримерното евклидово пространство, нележащи в една равнина. Тогава винаги има равнина, която минава през точно три от тях. Моцкин дава два противопримера, в първия от които точките лежат на две кръстосани прави, така че върху всяка от тях има поне три точки. Вторият противопример се състои от десетте пресечни точки на възможните тройки равнини измежду 5 равнини в общо положение. Моцкин счита, че може би това са единствените противопримери.

Следната комбинаторно-геометрична задача също изглежда интересна: дадени са n точки в евклидовата равнина, нележащи на една окръжност. Да разгледаме всички окръжности, определени от тези точки. Какъв е минималният брой на такива окръжности? Вероятно той е равен на $1+C_{n-1}^2$, именно когато $n-1$ от точките лежат на една окръжност. Същия въпрос можем да формулираме и комбинаторно: нека $a_1, \ldots, a_n$ са n елемента; $A_1, \ldots, A_m$ нека са множества, образувани от тези елементи, и нека всяко A_i съдържа поне три и не повече от n елемента. Всяка тройка (a_i, a_j, a_l), $1 \leqq i<j<l \leqq n$ се среща точно в едно A_i. Коя е минималната стойност на m? Върху правата, комбинаторната и геометричната задача съвпадат, но в равнината едва ли ще е така. За комбинаторната задача Ханани доказа (непубликувано), че минималната стойност лежи между $c_1 n^{3/2}$ и $c_2 n^{3/2}$.

И накрая още един въпрос от този род: Дирак [29] доказа, че ако в евклидовата равнина са дадени n точки, които не лежат на една права, то винаги има поне една точка измежду тях, през която минават поне $[\sqrt{n}]$ прави, съединяващи я с други от n-те точки. Той изказа предположението, че този брой може да се уточни на $[n/2]$.

6. Накрая бих желал да спомена едно изказано от мен и доказано от Мордел* геометрично неравенство (фиг. 1). Нека O е произволна вътрешна точка на триъгълника ABC. Тогава е в сила неравенството $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC} \geqq 2(\overline{OA}_1+\overline{OB}_1+\overline{OC}_1)$. Равенство имаме само когато триъгълникът е равностранен и O е центърът му.

* Задача в *Amer. Math. Monthly*, около 1935 г. Различни доказателства са публикувани в различни списания.

Забележка. Интересни геометрични проблеми читателят ще намери в швейцарското списание *Elemente der Mathematik*, в отдела за нерешени задачи, редактиран от Хадвигер.

През юни 1961 г. в Ситл (САЩ) се състоя Симпозиум по проблеми на изпъкналостта. Докладите скоро ще бъдат напечатани. Някои от тях съдържат интересни елементарно-геометрични задачи и резултати.

Литература

1. Erdös P. Néhány geometriai problémáról. *Mat. lapok*, **8** (1957), 86—92.
2. Hadwiger H. und E. Debrunner. Kombinatorische Topologie der Ebene. *L'Enseign. math.* **1** (1955), 56—89. В разширен вид тази статия излезе като брошура № 2 на Monographies de l'Enseignement mathématique. Наскоро ще излезе нова книга на Хадвигер върху тази област.
3. Erdös P. On sets of distances of n points. *Amer. Math. Monthly*, **54** (1946), 248—251.
4. Moser L. On the different distances determined by n points. *Amer. Math. Monthly*, **59** (1952), 85—91.
5. Pannwitz E. und H. Hopf, Aufgabe 167. *Jahresb. d. deutsch. Math.-Vereinigung*, **43** (1934), 114.
6. Grünbaum B. A proof of Vászonyi's conjecture. *Bull. Res. Council Israel*, **A6** (1956), 77—78.
7. Heppes A. Beweis einer Vermutung von Vászonyi. *Acta math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), 463—466.
8. Straszіewicz S. Sur un problème géometrique de P. Erdös. *Bull. de l'Acad. pol., Cl.* III, **5** (1957), 39—40.
9. Erdös P. On sets of distances of n points in Euclidean space. *Publ. Math. Inst. Math. Hung. Acad.*, **5** (1960), 165—169.
10. Eggleston H. G. Covering a threedimensional set with sets of smaller diameter. *Journ. Lond. Math. Soc.*, **30** (1955), 11—24.
11. Grünbaum B. A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **53** (1957), 776—778.
12. Heppes A. Térbeli ponthalmazok felosztása kisebb árméröjü rézzhalmazok összegére. *MTA III ont. Közleménei.*, **7** (1957), 413—416.
13. Erdös P. and P. Turan. On a problem of Sidon in additive number theory. *Journ. Lond. Math. Soc.*, **16** (1941), 212—215; **19** (1944), 208.
14. Erdös P. Some remarks on set theory. *PAMS*, **1** (1950), 127—141.
15. Erdös P. and S. Kakutani. On non-denumerable graphs. *BAMS*, **49** (1943), 457—461.
16. Erdös P. and N. G. de Brujn. A colour problem for infinite graphs and a problem of the theory of relations. *Indag. Math.*, **13** (1951), 371—373.
17. Erdös P. and P. Turan. On some sequences of integers. *Journ. Lond. Math. Soc.*, **11** (1936), 261—264. Най-добрите досегашни резултати са на K. Roth. On certain sets of integers. *Journ. Lond. Math. Soc.*, **29** (1954), 20—26 и F. A. Behrend. On sets of integers which contain three terms in arithmetical progression. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **32** (1946), 331—332.
18. Szekeres G. On a extremum problem in the plane. *Amer. Journ. of Math.*, **53** (1941), 208—210.
19. Croft H. T. On 6-point configurations in 3-space. *Journ. Lond. Math. Soc.*, **36** (1961), 289—306.
20. Erdös P. and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Comp. Math.* **2** (1935), 463—470.
21. Anning A. and P. Erdös. Integral distances. *BAMS*, **51** (1945), 598—600; 998.
22. Besicovitch A. S. Rational polygons. *Mathematatika*, **6** (1958), 98.
23. Gallai P. Problem 4065 (Erdös). *Amer. Math. Monthly*, **51** (1944), 169. Вж. също H. S. M. Coxeter. The real projective plane. N. Y., 1949.
24. *Educational Times*, **59** (1893), 98. Problem Nr. 11851.
25. Netto E. Lehrbuch der Combinatorik. Leipzig, 1927. S. 202—227.
26. Erdös P. and N. G. de Brujn. On a combinatorial problem. *Indag. Math.*, **10** (1948), 421—423.
27. Motzkin T. H. The lines and planes connecting the points of a finite set. *TAMS*, **70** (1951), 451—464. Тази работа съдържа много проблеми и резултати и историята на задачата.
28. Moser W. O. and L. M. Kelly. On the number of ordinary lines by n points. *Canad. Journ. of Math.*, **10** (1958), 210—218.
29. Dirac G. Collinearity properties of sets of points. *Quart. Journ. of Math.*, **2** (1951), 221—227.
30. Erdös P. Some unsolved problems. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad.*, **6A** (1961), 221—254,