Journal für die reine und angewandte Mathematik
Herausgegeben von **Helmut Hasse** und **Hans Rohrbach**

Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 30

Sonderabdruck aus Band 221, 1966. Seite 203 bis 208

Additive Gruppen mit vorgegebener Hausdorffscher Dimension[1])

Von *Paul Erdös* in Budapest und *Bodo Volkmann* in Stuttgart

1. In einer früheren Arbeit [5] hat einer der Verfasser die Frage aufgeworfen, ob es reelle Zahlkörper gibt, deren Hausdorffsche Dimension von Null und Eins verschieden ist. Dieses Problem ist, soweit uns bekannt, nach wie vor ungelöst, und auch die analoge Fragestellung für Gruppen scheint in der Literatur noch nirgends behandelt worden zu sein. Die vorliegende Arbeit gibt für das letztere Problem eine bejahende Antwort (Satz 1) und beweist eine analoge Aussage für gewisse allgemeinere Hausdorffsche Maße (Satz 2).

Man kann sodann die Frage stellen, was sich bei gegebener Dimension einer additiven Gruppe reeller Zahlen über die Menge der Dimensionen ihrer Untergruppen aussagen läßt. Als eine (negative) Teilantwort auf diese Frage zeigen wir an Hand eines Beispiels (Satz 3), daß es Gruppen G mit $\dim G = 1$ gibt, für deren Untergruppen U vom Maß Null durchweg $\dim U = 0$ gilt.

2. Für jedes reelle x betrachten wir die Cantorsche Darstellung[2])

$$x = [x] + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k(x)}{k!} \qquad (a_k(x) \text{ ganz}, 0 \leqq a_k(x) < k). \tag{1}$$

Bekanntlich ist sie, wie die Dezimalbruchentwicklung, eindeutig, wenn, soweit vorhanden, abbrechende Darstellungen verwendet werden. Sei nun $\alpha \in (0, 1)$ fest gewählt und sei $G(\alpha)$ die Menge der reellen x, bei denen es eine Konstante $\varkappa(x) > 0$ so gibt, daß in der Cantorschen Darstellung (1) für jedes $k \geqq k_0(x)$

$$a_k(x) \leqq \varkappa(x)\, k^\alpha \tag{2}$$

oder

$$a_k(x) \geqq k - \varkappa(x)\, k^\alpha \tag{3}$$

ist. Es gilt der

Satz 1. *$G(\alpha)$ ist eine additive Gruppe mit* $\dim G(\alpha) = \alpha$.

Beweis. a) Wie man sich leicht überzeugt (analog der Additionsregel für Dezimalbrüche), gilt stets

$$a_k(x+y) = \begin{cases} a_k(x) + a_k(y) + d_k \text{ oder} & (4) \\ a_k(x) + a_k(y) - k + d_k \text{ mit } d_k = 0 \text{ oder } 1, & (5) \end{cases}$$

[1]) Die Arbeit ist im Juli 1964 entstanden, als beide Verfasser am Mathematischen Institut der Universität Mainz tätig waren.

[2]) Vgl. z. B. [2], S. 116—120.

wobei (5) nur eintritt, wenn

$$(6) \qquad a_k(x) + a_k(y) \geqq k - 1$$

ist.

Wenn also x und y Elemente von $G(\alpha)$ sind, ergibt sich folgendes:

a. 1) Im Fall $a_k(x) \leqq \varkappa(x)\, k^\alpha$, $a_k(y) \leqq \varkappa(x)\, k^\alpha$ gilt bei hinreichend großem k die Gleichung (3) und

$$(7) \qquad a_k(x+y) \leqq \bigl(\varkappa(x) + \varkappa(y) + 1\bigr)\, k^\alpha.$$

a. 2) Im Falle $a_k(x) \geqq k - \varkappa(x)\, k^\alpha$, $a_k(y) \geqq k - \varkappa(x)\, k^\alpha$ gilt bei hinreichend großem k offenbar (6), ferner (5) und folglich

$$(8) \qquad a_k(x+y) \geqq k - \bigl(\varkappa(x) + \varkappa(y)\bigr)\, k^\alpha.$$

a. 3) Im Fall $a_k(x) \leqq \varkappa(x)\, k^\alpha$, $a_k(y) \geqq k - \varkappa(y)\, k^\alpha$ gilt entweder (4) und folglich (8), oder es gilt (5) und folglich (7).

a. 4) Im Fall $a_k(x) \geqq k - \varkappa(x)\, k^\alpha$, $a_k(y) \leqq \varkappa(y)\, k^\alpha$ schließt man analog dem Fall a. 3).

Da somit stets für hinreichend großes k entweder (7) oder (8) erfüllt ist, folgt $x + y \in G(\alpha)$.

b) Trivialerweise gilt $0 \in G(\alpha)$.

c) Aus $x \in G(\alpha)$ folgt wegen $a_k(-x) = k - 1 - a_k(x)$ oder $a_k(-x) = k - a_k(x)$ stets $-x \in G(\alpha)$.

Wegen a), b) und c) ist $G(\alpha)$ eine Gruppe.

d) Zum Nachweis von

$$(9) \qquad \dim G(\alpha) \geqq \alpha$$

gehen wir folgendermaßen vor: Sei $G_{nj}(\alpha)$ die Menge der x mit

$$(10) \qquad a_k(x) \leqq j k^\alpha \text{ oder } a_k(x) \geqq k - j k^\alpha \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Dann ist offenbar

$$G(\alpha) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{nj}(\alpha);$$

denn trivialerweise ist die rechte Menge in der linken enthalten, und umgekehrt folgt aus $x \in G(\alpha)$, daß es ein j gibt mit

$$a_k(x) \leqq j k^\alpha \text{ oder } a_k(x) \geqq k - j k^\alpha$$

für jedes $k \geqq k_0(x)$. Folglich gibt es ein j_0, z. B. $j_0 = \max\bigl(k_0(x), j\bigr)$, so daß $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{nj_0}(\alpha)$ und daher $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{nj}(\alpha)$ gilt.

Wir wenden bei festem j und ganzem h auf die Menge $G^{jh}(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{nj}(\alpha) \frown [h, h+1)$ den Satz 5 von H. G. Eggleston [1] in der in [4] angegebenen Form an. Dabei benutzen wir die Tatsache, daß die Menge $G_{nj}^h(\alpha) = G_{nj}(\alpha) \frown (h, h+1]$ sich jeweils als Vereinigung einer gewissen Anzahl $g_{nj}(\alpha)$ von Intervallen der Form $\left[\frac{q}{n!}, \frac{q+1}{n!}\right)$ mit ganzem q darstellen läßt. Für hinreichend großes n (nämlich immer dann, wenn die beiden Intervalle $[0, j n^\alpha]$ und $[n - j n^\alpha, n-1]$ einander nicht überlappen) ist offenbar $g_{n+1\,j}(\alpha)/g_{nj}(\alpha)$

gleich der Anzahl der Werte, die $a_{n+1}(x)$ gemäß (2) und (3) annehmen kann, also gleich $2j(n+1)^\alpha + r_{n+1}$, wobei $|r_{n+1}| < 2$ ist. Infolgedessen gibt es eine Konstante $C_1 = C_1(j, \alpha)$ mit

$$\begin{aligned} g_{nj}(\alpha) &= C_1 \prod_{k=1}^{n} (2jk^\alpha + r_k) = C_1 2^n n!^\alpha \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{r_k}{2jk^\alpha}\right) \\ &\leqq C_1 2^n j^n n!^\alpha e^{\frac{1}{j} \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}} \\ &= C_1 (2j)^n n!^\alpha e^{O(n^{1-\alpha})}. \end{aligned}$$

Also ist

$$g_{nj}(\alpha) = (2j)^n n!^\alpha e^{O(n^{1-\alpha})}. \tag{11}$$

Somit nimmt bei festem $\beta \in (0, 1)$ die im Satz von Eggleston auftretende Reihe (es ist $\lambda_n = \frac{1}{n!}$ zu setzen) die Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{g_{nj}(\alpha) \lambda_n^\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot n!^\beta}{2^n j^n n!^\alpha e^{O(n^{1-\alpha})}} \tag{12}$$

an. Wie man mit Hilfe der Stirlingschen Formel erkennt, ist diese Reihe für jedes $\beta < \alpha$ konvergent, und somit folgt

$$\dim G^{jh}(\alpha) \geqq \alpha \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

für jedes h, also auch (9).

e) Zum Beweis der Ungleichung

$$\dim G(\alpha) \leqq \alpha \tag{13}$$

verwendet man die gleiche Intervallüberdeckung der Mengen $G^{jh}(\alpha)$ wie unter d). Es ergibt sich unmittelbar für das β-dimensionale Hausdorffsche Maß $\{G^{jh}\}^\beta$ bei jedem $\beta > \alpha$ wegen (11) die Abschätzung

$$\{G^{jh}(\alpha)\}^\beta \leqq \varliminf_{n \to \infty} g_{nj}(\alpha) \lambda_n^\beta = \varliminf_{n \to \infty} (2j)^n n!^{\alpha-\beta} e^{O(n^{1-\alpha})} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

wieder auf Grund der Stirlingschen Formel. Daher folgt (13) und somit wegen (9) die Behauptung.

3. Sei für jedes α mit $\alpha' \leqq \alpha \leqq \alpha''$ die Funktion $\mu^{(\alpha)}(t)$ im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ erklärt, monoton nichtabnehmend, bei $t = 0$ rechtsseitig stetig; ferner gelte $\mu^{(\alpha)}(0) = 0$, $\mu^{(\alpha)}(t) = o(t)$ für $t \to 0$, und aus $\alpha' < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha''$ folge immer $\mu^{(\alpha_2)}(t) \leqq \mu^{(\alpha_1)}(t)$ sowie

$$\lim_{t \to 0} \left(\mu^{(\alpha_2)}(t) / \mu^{(\alpha_1)}(t)\right) = 0.$$

Die Menge aller dieser Funktionen werde mit F bezeichnet, die in bezug auf sie definierte Dimension[3]) einer Punktmenge M mit $\dim_F M$, das mit $\mu^{(\alpha)}(t)$ gebildete äußere Hausdorffsche Maß mit $\mu^{(\alpha)}\{M\}$. Dann gilt der

Satz 2. *Falls für alle α_1, α_2 mit $\alpha' < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha''$ beim Grenzübergang $t \to 0$ die Bedingung*

$$\mu^{(\alpha_2)}(t) = o\left(t^{\frac{1}{\varepsilon \log \log (1/t)}} \mu^{(\alpha_1)}(t)\right) \textit{ für jedes } \varepsilon > 0 \tag{14}$$

[3]) Vgl. z. B. [4].

erfüllt ist, gibt es zu jedem $\alpha \in (\alpha', \alpha'')$ *eine additive Gruppe* $G_F(\alpha)$ *mit*

$$\dim_F G_F(\alpha) = \alpha.$$

Beweis. Es sei

$$\varphi_\alpha(n) = \frac{\mu^{(\alpha)}(1/(n-1)!)}{\mu^{(\alpha)}(1/n!)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und $G_F(\alpha)$ die Menge der reellen x, für die es ein $\varkappa(x)$ so gibt, daß für jedes $k \geqq k_0(x)$ in der Cantorschen Darstellung (1)

$$a_k(x) \leqq \varkappa(x)\, \varphi_\alpha(k) \text{ oder } a_k(x) \geqq k - \varkappa(x)\, \varphi_\alpha(k)$$

gilt. Dann kann man die Gruppeneigenschaft von $G_F(\alpha)$ wie bei Satz 1 nachweisen. Auch der Beweis der Ungleichungen, die (9) und (13) entsprechen, verläuft analog. Dabei tritt an Stelle von $g_{nj}(\alpha)$ jetzt jeweils eine Anzahl $g_{nj}(F, \alpha)$ von Intervallen auf, die einer Gleichung der Form

$$\frac{g_{n+1\,j}(F, \alpha)}{g_{nj}(F, \alpha)} = 2j\varphi_\alpha(n+1) + r_n \text{ mit } |\, r_n \,| < 2$$

genügt. Es ergibt sich analog (11) die Beziehung[4])

$$g_{nj}(F, \alpha) = C_2 (2j)^n \prod_{k=1}^{n} \varphi_\alpha(k) \left(1 + \frac{r_k}{2j\, \varphi_\alpha(k)}\right),$$

woraus einerseits für alle hinreichend großen n

$$(15) \qquad g_{nj}(F, \alpha) \geqq C_3 (2j)^n \frac{\mu^{(\alpha)}(1)}{\mu^{(\alpha)}(1/n!)} \geqq C_4^n \frac{1}{\mu^{(\alpha)}(1/n!)} \qquad (C_4 > 1)$$

und andererseits

$$(16) \qquad g_{nj}(F, \alpha) \leqq C_5^n \frac{1}{\mu^{(\alpha)}(1/n!)}$$

folgt. Somit erhält man an Stelle von (12) wegen (15) für $\beta < \alpha$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{g_{nj}(F, \alpha)\, \mu^{(\beta)}(\lambda_n)} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n C_4^{-n} \mu^{(\alpha)}(1/n!)}{\mu^{(\beta)}(1/n!)}$$
$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} C_6^{-n} \frac{\mu^{(\alpha)}(1/n!)}{\mu^{(\beta)}(1/n!)} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} C_6^{-n} \qquad (C_6 > 1),$$

so daß Konvergenz eintritt und in der Tat die zu (9) analoge Ungleichung folgt.

In der entgegengesetzten Richtung ergibt sich analog zu e) für $\beta > \alpha$ auf Grund von (16) die Abschätzung

$$\mu^{(\beta)}\{G_F^{jh}(\alpha)\} \leqq \varliminf_{n \to \infty} g_{nj}(F, \alpha) \cdot \mu^{(\beta)}\left(\frac{1}{n!}\right) \leqq \varliminf_{n \to \infty} C_5^n \frac{\mu^{(\beta)}(1/n!)}{\mu^{(\alpha)}(1/n!)} = 0,$$

wie man unter Verwendung der Voraussetzung (14) mit Hilfe der Stirlingschen Formel nachrechnet. Somit ergibt sich auch die zu (13) analoge Aussage und daher die Behauptung.

---

[4]) $C_2, C_3, \ldots$ sind positive, von n unabhängige Zahlen.

4. Es liegt auf der Hand, wie sich Satz 1 auf den m-dimensionalen Raum verallgemeinern läßt. Zum Nachweis der Existenz einer additiven Gruppe G im R_m mit vorgegebener Hausdorffscher Dimension $\alpha \in [0, m]$ verwende man z. B. das kartesische Produkt

$$G = G\left(\frac{\alpha}{m}\right) \times G\left(\frac{\alpha}{m}\right) \times \cdots \times G\left(\frac{\alpha}{m}\right),$$

und bei den Überdeckungsargumenten benutze man entsprechend die aus Intervallen der Form $\left[\frac{q_i}{n!}, \frac{q_i+1}{n!}\right)$ $(i = 1, \ldots, m)$ gebildeten m-dimensionalen Würfel mit dem Durchmesser $\lambda_n^* = \sqrt{m}/n!$. Dabei tritt die Anzahl $g_{nj}^*(\alpha) = g_{nj}(\alpha)^m$ an die Stelle von $g_{nj}(\alpha)$. Auch Satz 2 läßt sich auf die gleiche Art verallgemeinern.

5. Wie in der Einleitung bemerkt, gilt der

Satz 3. *Unter Annahme der Kontinuumhypothese gibt es eine additive Gruppe H von reellen Zahlen mit $\{H\}^1 > 0$ (also $\dim H = 1$) derart, daß keine Untergruppe U mit $0 < \dim U < 1$ existiert.*

Beweis. Wir beweisen den Satz in etwas schärferer Form durch Konstruktion einer Gruppe H mit $\{H\}^1 > 0$, deren sämtliche Untergruppen U mit $\{U\}^1 = 0$ sogar abzählbar sind, so daß aus $\dim U < 1$ sicher $\dim U = 0$ folgt[5]). Dazu verwenden wir in modifizierter Form eine von Sierpiński [3] (unter Annahme von $2^{\aleph_0} = \aleph_1$) angegebene Konstruktion einer Menge M mit $\{M\}^1 > 0$, bei der für jedes Q mit $\{Q\}^1 = 0$ der Durchschnitt $M \cap Q$ (höchstens) abzählbar ist.

Bekanntlich ist jede Menge vom Maß Null in einer G_δ-Menge vom Maß Null enthalten, und die Klasse aller solchen G_δ-Mengen hat die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$. Sie sei in der Form $\{A_\alpha\}$ wohlgeordnet, wobei α alle Ordnungszahlen mit $1 \leqq \alpha < \Omega_1$ durchläuft. Ferner sei jeweils $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$, und es werde folgendermaßen durch transfinite Induktion eine Menge von reellen Zahlen x_α definiert: Sei $x_1 = 1$. Sind alle x_β mit $\beta < \alpha$ schon erklärt, so sei E_α die von der Menge $\{x_\beta\}_{\beta<\alpha}$ erzeugte additive Gruppe. Dann ist wegen $\beta < \alpha < \Omega_1$ offenbar E_α stets abzählbar. Es sei nun[6])

$$D_\alpha = \bigcup_{y \in E_\alpha} (B_\alpha + \{y\}),$$

und x_α sei eine beliebige Zahl, die nicht zu D_α gehört. Schließlich sei H die von der Menge $\{x_\alpha\}_{1 \leqq \alpha < \Omega_1}$ erzeugte additive Gruppe.

Ist nun $U \leqq H$ eine Untergruppe mit $\dim U < 1$, also mit $\{U\}^1 = 0$, so gibt es nach Konstruktion ein $\alpha < \Omega_1$ mit $U \leqq B_\alpha$. Dann ist die Menge $H \cap B_\alpha$ und folglich auch U abzählbar; denn für jedes Element $h \in H$ gibt es eine Darstellung der Form

$$h = \sum_{i=1}^{k} c_i x_{\gamma_i}$$

mit ganzen c_i, und wenn hierin etwa $\gamma_k > \alpha$ ist, so folgt auf Grund der Konstruktion der Mengen B_β, daß $h \notin B_{\gamma_k}$, also wegen $B_\alpha \leqq B_{\gamma_k}$ auch $h \notin B_\alpha$ ist. Es folgt also $U \leqq E_\alpha$, und daher ist U in der Tat abzählbar.

[5]) Es ist zu vermuten, daß sich die im Satz formulierte (schwächere) Behauptung auch ohne Kontinuumhypothese beweisen läßt; doch haben wir dies nicht untersucht.

[6]) Dabei bedeutet „+" die Bildung der Summenmenge.

Die Aussage $\{H\}^1 > 0$ ergibt sich daraus, daß andernfalls die obige Überlegung mit $U = H$ die Abzählbarkeit von H beweisen würde, während H nach Konstruktion die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ hat. Damit ist alles bewiesen.

6. Mit derselben Methode kann man einen komplexen, algebraisch abgeschlossenen Zahlkörper von der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ konstruieren, der mit jeder Menge vom Maß Null einen abzählbaren Durchschnitt hat. Man braucht nur bei dem Konstruktionsverfahren jeweils statt der additiv erzeugten Gruppen die kleinsten algebraisch abgeschlossenen Körper zu verwenden, in denen die betreffenden Mengen enthalten sind.

Folgende Verschärfung von Satz 1 ist zu vermuten: Sei S eine Borelmenge mit $\dim S = 1$, die zugleich additive Gruppe ist. Dann gibt es für jedes α mit $0 \leqq \alpha \leqq 1$ eine Untergruppe S_α mit $\dim S_\alpha = \alpha$.

Literatur

[1] *H. G. Eggleston*, Sets of fractional dimension which occur in some problems of number theory, Proc. London Math. Soc. **54** (1951), 42—93.

[2] *O. Perron*, Irrationalzahlen, 4. Aufl., Berlin 1960.

[3] *W. Sierpiński*, Hypothèse du continu, 2. Aufl., New York 1956.

[4] *B. Volkmann*, Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Ziffereigenschaften charakterisiert sind. I., Math. Z. **58** (1953), 284—287.

[5] *B. Volkmann*, Eine metrische Eigenschaft reeller Zahlkörper, Math. Ann. **141** (1960), 237—238.

Eingegangen 22. November 1964