Számelméleti megjegyzések V.
Extremális problémák a számelméletben, II.

Erdős Pál

E cikk első fejezetében, az „Extremális problémák a számelméletben, I."-ben (Mat. Lapok 13(1962), 228—255, e cikket röviden I-ként fogom idézni) diskutált problémákról írok, amennyiben e kérdésekről I megjelenése óta történt említésre méltó haladás. A cikk második fejezetében új, részben I megjelenése óta felvetett problémákat és eredményeket diszkutálok. Ellentétben I-el, nem szorítkozunk véges intervallumokra vonatkozó extrém problémákra, s így sok érdekes új kérdésre jutunk. $a, a_1, \ldots, b, b_1, \ldots l, d \ldots$ pozitív egész számokat fog jelölni, p, q prímszámokat.

1.

I. 9. K. F. Roth a következő kérdést vizsgálta: Legyen $\varphi(k) = \pm 1$, $1 \leqq k \leqq n$.

$$G(n) = \min_{\varphi} \max_{a, d, m} \left| \sum_{k=0}^{m} \varphi(a+kd) \right| \qquad (a+md \leqq n)$$

Milyen gyorsan tart $G(n)$ a végtelenhez?

Én I. 9-ben azt sejtettem, hogy ha

$$F(n) = \min_{\varphi} \max_{m, d} \left| \sum_{\substack{k=1 \\ md \leqq n}}^{m} \varphi(kd) \right|$$

akkor $F(n) \to \infty$, ha $n \to \infty$, sőt azt is sejtettem, hogy $F(n) > c_1 \log n$. $G(n)$-ből $F(n)$-et úgy nyerjük, hogy csak az $a = 0$ esetet tekintjük. Természetesen várható, hogy $G(n)$ sokkal gyorsabban tart a végtelenhez, mint $F(n)$. Roth be is bizonyította, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén, ha $n > n_0(\varepsilon)$ $G(n) > n^{1/4 - \varepsilon}$ és sejti, hogy $G(n) > n^{1/2 - \varepsilon}$. Továbbá megjegyzi, hogy elemi valószínűségszámítási eredményekből nyerhető, hogy van oly $\varphi(k) = \pm 1$, amelyre $G(n) < c(n \log n)^{1/2}$ alkalmas c-re. Először is bebizonyítjuk, hogy $G(n) < Cn^{1/2}$ alkalmas elegendő nagy

C-re, ($C, c, c_1, \ldots$ mindig alkalmasan választott pozitív abszolút konstansokat fog jelölni).

Hogy állításunkat bebizonyítsuk, elsősorban is megjegyezzük, hogy a $\varphi(k) = \pm 1$, $1 \leqq k \leqq n$ függvényt 2^n-féle módon választhatjuk meg. Ismeretes továbbá a következő Kolmogoroff féle tétel: Legyen $\varphi(k) = \pm 1$, $1 \leqq k \leqq m$ (így $\varphi(k)$ 2^m féleképpen választható). Jelölje $M(t)$ $\varphi(k)$ azon választásainak számát, amelyekre

$$\max_{1 \leqq l \leqq m} \left| \sum_{k=1}^{l} \varphi(k) \right| > tm^{1/2}$$

és $m(t)$ azon választások számát, melyekre

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \varphi(k) \right| > tm^{1/2}.$$

Fennáll

$$M(t) \leqq 2m(t) < c_1 e^{-c_2 t^2} 2^m. \tag{1}$$

(1)-ben az első egyenlőtlenség való Kolmogorofftól, a második természetesen régóta ismert a binomiális eloszlás elméletéből. Jelölje $M_1(2t)$ azon $\varphi(k) = \pm 1$ függvények számát, melyekre

$$\max_{1 \leqq u < v \leqq m} \left| \sum_{u}^{v} \varphi(k) \right| > 2tm^{1/2}$$

(1)-ből nyilvánvaló, hogy

$$M_1(2t) \leqq 2m(t) < c_1 e^{-c_2 t^2} 2^m. \tag{2}$$

(2)-ből mármost nyilvánvaló, hogy azon $\varphi(k) = \pm 1$, $1 \leqq k \leqq n$ függvények száma, melyekre fix a és d $(0 < a \leqq d)$ mellett van oly $0 \leqq u < v \leqq n/d$, hogy

$$\left| \sum_{u}^{v} \varphi(a+kd) \right| \geqq 2t \left(\frac{n}{d} \right)^{1/2}$$

kisebb, mint $c_1 e^{-c_2 t^2} 2^n$ (ti. ha $k \not\equiv a \pmod{d}$), akkor feltételünk semmi megkötést se jelent, s az $a+kd$ alakú számokra (2) alkalmazható). Tehát ha $t = Cd^{1/2}/2$, akkor nyerjük, hogy azon $\varphi(k)$ függvények száma, melyekre van oly u és v, hogy

$$\left| \sum_{u}^{v} \varphi(a+kd) \right| > Cn^{1/2} \tag{3}$$

kisebb, mint

$$c_1 e^{-c_2 C^2 d/4} 2^n \tag{4}$$

Minthogy a, d féleképpen, választható (4)-ből nyerjük, hogy azon $\varphi(k)$ függvények száma, melyekre van oly a, u, v, hogy

$$\sum_u^v |\varphi(a+kd)| > Cn^{1/2}$$

kisebb, mint

$$c_1 d e^{-c_2 C^2 d/4} 2^n. \tag{5}$$

(5)-ből nyerjük d-re való szummálással ($d=1, 2, \ldots$) hogy azon φ $\varphi(k) = \pm 1$ függvények száma, melyekre $G(n) > Cn^{1/2}$, azaz melyekre van oly a, d, u, v hogy

$$\left|\sum_u^v \varphi(a+kd)\right| > Cn^{1/2}$$

kisebb, mint

$$2^n \sum_{d=1}^{\infty} c_1 d e^{-c_2 C^2 d/4} < 2^n \tag{6}$$

ha C elegendő nagy. (6)-ból nyilván következik, hogy van oly $\varphi(k)$ függvény, melyre $G(n) \leqq Cn^{1/2}$.

Valószínűnek látszik, hogy minden $c>0$-ra, ha $n > n_0(c)$, akkor $G(n) < cn^{1/2}$, azaz

$$\lim_{n=\infty} G(n)/n^{1/2} = 0. \tag{7}$$

(7) bizonyítása azonban eddig nem sikerült.

Cantor, Schreiber, Strauss és én konstruáltunk (egymástól függetlenül) olyan $\varphi(n) = \pm 1$ függvényt, melyre minden a és d mellett

$$\sup_{l=\infty} \left|\sum_{k=1}^{l} \varphi(a+kd)\right| = l(a, d) < \infty \tag{8}$$

Ugyanis ha $\varphi(u) = -\varphi(m+u)$, $1 \leqq u \leqq m$, akkor minden $d|m$ esetén, ha $0 \leqq a < d$

$$\sum_{0 \leqq l < \frac{m}{d} - 1} \varphi(a+ld) = 0.$$

E megjegyzésből a fenti tulajdonságú $\varphi(n)$ könnyen nyerhető.

Könnyű belátni azonban, hogy az $l(a, d)$, $0 \leqq a < d$, $1 \leqq d < \infty$ számok nem lehetnek korlátosak. Legyen $L(d) = \max_a l(a, d)$ $L(d)$-re nincs jó alsó becslésünk, példánk kidolgozva $L(d) < c^d d!$ felső becslést ad s nem tudjuk, mily közel van e becslés a valódi határhoz.

Felvetettük még a következő kérdést: Legyenek $\zeta^{(i)}=\{n_1^{(i)}<n_2^{(i)}<\dots\}$ $1<i<\infty$ egész számok sorozatai, akkor van oly $\varphi(n)=\pm 1$ függvény, hogy

$$\sup_{l=\infty}\left|\sum_{j=1}^{l}\varphi(n_j^{(i)})\right|$$

minden i-re véges. A válasz bizonyára igenlő lesz.

K. F. Roth, Remark concerning integer sequençes, Acta Arithmetica, IX(1964), 257—260).

I. 11. Legyen $a_1<a_2<\dots<a_Z\leqq n$ olyan sorozat, hogy a

$$\prod_{i=1}^{Z}a_i^{\varepsilon_i},\qquad \varepsilon_i=0 \quad \text{vagy} \quad 1$$

szorzatok mind különbözők. Sejtettem, I-ben, hogy

(1) $$Z<\pi(n)+cn^{1/2}/\log n.$$

(1)-et azóta bebizonyítottam. Hogy (1)-et beláthassuk, az a-kat két részre osztjuk, az első osztályban vannak azon $a_{i_1},\dots,a_{i_r}$-ek, melyeknek minden primfaktora $<n^{1/2}$. Kimutatjuk, hogy

(2) $$r<c_1n^{1/2}/\log n.$$

Feltevés szerint a

(3) $$\prod_{j=1}^{r}a_{i_j}^{\varepsilon_i}\qquad \varepsilon_i=0 \quad \text{vagy} \quad 1$$

szorzatok mind különbözőek s a (3) alatti számok száma nyilván 2^r. A (3) alatti számok számát most egy más módon fogjuk megbecsülni. A (3) alatti számok minden primfaktora $\leqq n^{1/2}$ s ezért ezek $U\cdot V$ alakba írhatók, ahol U minden primfaktora $\leqq n^{1/3}$, s V minden p primfaktorára $n^{1/3}<p\leqq n^{1/2}$. Megbecsüljük mármost, hogy hányféleképpen választható meg U. Nyilván $U<n^r$ (ti. a (3) alatti számok is kisebbek, mint n^r) s így a p primszám kitevője U-ban nyilván legfeljebb (ha $n>n_0$)

(4) $$1+\frac{r\log n}{\log p}\leqq 1+\frac{r\log n}{\log 2}<r^2$$

féleképpen választható. (4) és (3) miatt U legfeljebb

(5) $$(r^2)^{\pi(n^{1/3})}<r^{2n^{1/3}}<n^{2n^{1/3}}$$

féleképpen választható.

Vizsgáljuk mármost, hogy V hányféleképpen választható meg. a_{i_j} legfeljebb két $n^{1/3}$-nál nagyobb primszámmal lehet osztható, s ezért ha $p_1, \ldots, p_s$ jelenti az $n^{1/3}$ és $n^{1/3}$ közötti primszámokat s α_i jelenti, hogy p_j hány a_{i_j}-ban fordulhat elő, nyilván (ha $p^2|a_{i_j}$, akkor 2-t számítunk)

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \leqq 2r \tag{6}$$

(6), (3) és az aritmetikai s geometriai közép egyenlőtlensége miatt V-re legfeljebb

$$\prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1) \leqq \left(\frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1) \right)^s \leqq \left(\frac{2r+s}{s} \right)^s \tag{7}$$

választásunk van. (5) és (7) miatt $U \cdot V$-re, azaz a (3) alatti számokra legfeljebb

$$n^{2n^{1/3}} \left(1 + \frac{2r}{s} \right)^s \tag{8}$$

választásunk van. $s < c_2(n/\log n)^{1/2}$ miatt egyszerű számolással adódik, hogy ha (2) elegendő nagy c_1-re nem igaz, akkor a (8) alatti kifejezés $< 2^r$, azaz a (3) alatti szorzatok nem lehetnek mind különbözők s ezzel (2) be van bizonyítva.

A második osztálybeli számok $p \cdot b$ alakúak, ahol $p > n^{1/2}$. Az $n^{1/2}$-nél nagyobb primszámokat két osztályba osztjuk, az első osztályban azon primszámok vannak, melyekhez legfeljebb egy pb alakú szám van. Legyenek $p_1, \ldots, p_j$ a második osztálybeli primszámok, $p_i b_i^{(k)}$, $1 \leqq i \leqq j$; $1 \leqq k \leqq t_i$ legyenek az e primszámokhoz tartozó második osztálybeli számok. A második osztálybeli számok száma nyilván kisebb, mint

$$\pi(n) + \sum_{i=1}^{j} t_i. \tag{9}$$

(2) és (9) miatt (1) be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy

$$T = \sum_{i=1}^{j} t_i < c_3 n^{1/2}/\log n \tag{10}$$

A

$$\prod_{i=1}^{j} \prod_{k=1}^{t_i} (p_i b_i^{(k)})^{\varepsilon_{i,k}}, \qquad \varepsilon_{i,k} = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \tag{11}$$

alakú számok száma nyilván 2^T. A (11) alatti számok $U'V'$ alakba írhatók, ahol U' minden primfaktora kisebb, mint $n^{1/2}$ és V' minden primfaktora $\geqq n^{1/2}$. Ugyanúgy, mint az első osztálybeli számoknál megbecsüljük, hogy U' és V' hányféleképpen választható. V' nyilván

$$\prod_{i=1}^{j} (t_i + 1)$$

féleképpen választható, ti. p_i kitevője a (11) alatti szorzatokban csak a 0, 1, ... t_i számok valamelyike lehet. Minthogy a geometriai közép nem nagyobb, mint az aritmetikai, fennáll

$$\prod_{i=1}^{j}(t_i+1) \leqq \left(\frac{T+j}{j}\right)^j \leqq 3^{T/2} \tag{12}$$

(12) második egyenlőtlensége $T \geqq 2j$-ből és abból következik, hogy $\left(\frac{T+j}{j}\right)^j$ j-nek monoton növekvő függvénye.

Legyen $\varepsilon > 0$ elegendő kicsi, pl. $\varepsilon = \frac{1}{10}$ s legyen c_3 elegendő nagy s tegyük fel, hogy (10) nem teljesül.(8)-ból egyszerű számítással nyerjük, (r (8)-ban most T-vel helyettesítendő), hogy U' számára legfeljebb $(1+\varepsilon)^T$ választásunk lehet, s így (12) miatt a (11) alatti számokra legfeljebb

$$3^{T/2}(1+\varepsilon)^T < 2^T$$

választásunk lehet — azaz a (11) alatti számok nem lehetnek mind különbözők, ami ellentmondás. Ezzel (10), s így (1) be van bizonyítva.

Nem lehetetlen, hogy

$$\max Z = \pi(n) + \pi(n^{1/2}) + o\left(\frac{n^{1/2}}{\log n}\right) \tag{13}$$

de (13) igazságát nem tudom eldönteni. Első pillanatban sejteni lehetne, hogy

$$\max Z = \sum_{k=0}^{\infty} \pi(n^{1/2^k})$$

de Pósával megjegyeztük, hogy ez nem igaz. Legyen az $a_1 < \ldots < a_Z \leqq n$ sorozat következőképpen definiálva: Ha $p > n^{1/7}$, akkor p, p^2, p^4 előfordul az a-k között, amíg ezek nem nagyobbak n-nél. Ha $p \leqq n^{1/7}$ p^3, p^5, p^6, p^7 fordul elő az a-k között. A $\prod_{i=1}^{Z} a_i^{\varepsilon_i}$ alakú számok nyilván mind különbözők s

$$Z = \pi(n) + \pi(n^{1/2}) + \pi(n^{1/4}) + \pi(n^{1/7}). \tag{14}$$

Legyen $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, ahol $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i = 0$ vagy 1, összegek mind különbözők. Legyen $b_k = \min a_k$. (14) mintájára könnyű belátni, hogy

$$\max Z \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \pi(n^{1/b_k}) \tag{15}$$

Talán (15)-ben egyenlőség áll fenn.

I. 11-ben továbbá kérdeztem: megadható-e $n(1-\varepsilon)$ szám n-ig úgy, hogy $\prod_{r=1}^{l_1} a_{i_r}=\prod_{r=1}^{l_2} a_{j_r}$ csak akkor oldható meg, ha $l_1=l_2$. Selfridge konstruált $\frac{1}{e}$ sűrűségű ily sorozatot az eredeti kérdés azonban még nincsen elintézve.

I. 13. Jelentse $u_l(n)$ azt a legnagyobb számot, melyre van oly $a_1<\ldots<a_{u_l(n)}\leqq n$, hogy az $a_ia_j=m$ egyenletnek minden m-re l-nél kevesebb megoldása legyen. Bebizonyítottam, hogy

$$u_{2^l}(n)=\big(1+o(1)\big)\frac{n(\log\log n)^{l-1}}{(l-1)!\log n}=\big(1+o(1)\big)\pi_l(n)$$

A bizonyítás igen komplikált.

P. Erdős, On the multiplicative representation of integers, Israel Journal of Math. 2(1964). 251—261

I. 14. Legyen $a_1<\ldots<a_l\leqq n$ olyan sorozat, hogy nincs k, a_i melyeknek páronként ugyanaz a legnagyobb közös osztójuk. Bebizonyítottam, hogy minden k-ra és $\varepsilon>0$-ra, ha $n>n_0$ (ε, k) $(\max l=A_k(n))$

$$(1)\qquad 2^{c_k\log n/\log\log n}<A_k(n)<n^{3/4+\varepsilon}$$

Valószínűnek látszik, hogy

$$(2)\qquad A_k(n)<2^{c'_k\log n/\log\log n}.$$

(2) következne egy Radoval való kombinatorikus sejtésünkből. Legyen $g(k, t)$ az a legkisebb szám, melyre ha $A_1, A_2, \ldots A_s$ $s=g(k, t)$ legfeljebb k elemű halmazok, akkor mindig megadható t oly A, melyeknek páronként ugyanaz a közös részük. Sejtettük, hogy

$$(3)\qquad g(k, t)<c_1^k(t-1)^k$$

(3) helyett csak $g(k, t)<k!\,(t-1)^k$ bizonyítása sikerült. (3)-nak több alkalmazása lenne számelméleti kérdésekben.

Még a következő kérdést szeretném megemlíteni.

Igaz-e, hogy minden α-hoz van $n_0(\alpha)$ ugy, hogy ha $n>n_0(\alpha)$ és

$$1\leqq a_1<\ldots<a_l\leqq n,\ l>\alpha n,$$

akkor mindig van három a, melyeknek páronként ugyanaz a legkisebb közös többszöröse? Ha α elég közel van 1-hez, úgy ez triviális, az általános kérdés megoldása eddig nem sikerült.

P. Erdős, On a problem in elementary number theory and a combinatorial problem, Math. of Computation, 18(1964), 644—646.

P. Erdős and R. Rado, Intersection theorems for systems of sets, J. London Math. Soc. 35(1960), 85—90.

I. 18. Fennáll-e, hogy

$$\lim_{k=\infty} \max_n f(n, k)/\pi(k) = \lim_{k=\infty} \max_n F(n, k)/\pi(k) =$$

$$= \lim_{k=\infty} \min_n F(n, k)/\pi(k) = 1.$$

I. 20. Selfridge bebizonyította Stein sejtését, mely szerint ha $a_i (\mathrm{mod}\, n_i)$, $1 < n_1 < \ldots < n_k$ oly kongruenciarendszer, hogy nincs oly szám, mely közülük egynél több kongruenciát kielégít, akkor van oly $0 < u \leqq 2^k$ szám, mely ezen kongruenciák egyikét sem elégíti ki. Selfridge eredménye még nincs publikálva.

Én sejtettem, hogy ha $a_i (\mathrm{mod}\, n_i)$, $1 \leqq i \leqq k$ ($n_{i_1} \neq n_{i_2}$ nincs feltételezve) olyan, hogy mindig van egy szám, mely nem elégíti ki e kongruenciák egyikét sem, akkor mindig van u, $0 < u \leqq 2^k$, mely e kongruenciák egyikét sem elégíti ki. Selfridge ezt $0 < u \leqq e^k$-val bizonyította be.

Legyen $\sum_{l=1}^{k} 1/n_i \leqq 1 - \frac{1}{2^k}$, $a_i (\mathrm{mod}\, n_i)$, $1 \leqq i \leqq k$ tetszőleges kongruenciarendszer. Igaz-e, hogy van oly u, $0 < u \leqq 2^k$, mely e kongruenciák egyikét se elégíti ki?

I. 21. Daykin és Baines bebizonyították D. Newman sejtését, mely szerint ha $1 \leqq a_1 < \ldots < a_{n+1} \leqq 2n$, akkor mindig van közöttük kettő, melyre

(1) $$(a_i, a_j) = 1, \; a_i \leqq n.$$

Newman továbbá sejtette, hogy minden $m \geqq n$-hez van az $1, 2, \ldots, n$ számoknak oly $i_1^{(m)}, \ldots, i_n^{(m)}$ permutációja, melyre

(2) $$(r, m + i_r^{(m)}) = 1, \; 1 \leqq r \leqq n.$$

(2)-t $m = n$ esetén bebizonyították, s ebből nyerték (1)-et.

Legyen $a_1 < \ldots < a_{n+1} \leqq 2n$, $f(2n; a_1, \ldots, a_{n+1})$ jelentse az $(a_i, a_j) = 1$ párok számát. Legyen $u_k = 3 \cdot 5 \ldots p_k$ az első k páratlan primszám szorzata, továbbá legyen $u_r < 2n < u_{r+1}$. Bebizonyítottam, hogy ha $n > n_0$, akkor $f(2n; a_1, \ldots, a_{n+1})$ minimumát a következő sorozat adja: az a-k a páros számok és u_r. A bizonyítás hasonló, mint I. 21-ben a (14) bizonyítása. Valószínűnek látszik, hogy ha $a_1 < \ldots < a_{n+1} \leqq 2n$, akkor mindig van egy a, mely sok más a-hoz relatív prim, de nem tudtam bebizonyítani, hogy ezeknek száma n-nel végtelenhez tart. E kérdés eldöntése valószínűleg nem lesz nehéz. (1966 szept.: Sárközi és Szemerédi e sejtést bebizonyították).

Felvethető a következő kérdés: Legyen $a_1 < \ldots < a_{n+2} \leqq 2n$. Minden a-t helyettesítsünk egy ponttal s a_i-t éllel összekötjük a_j-vel, ha $(a_i, a_j) = 1$. Igaz-e, hogy az így nyert gráfban van kör, sőt talán négyszög is? (Sárközi és Szemerédi ezt is bebizonyították).

D. E. Daykin and M. J. Baines, Coprime mappings between sets of consecutive integers, Matematika 10(1963), 132—136.

I. 24. Legyen $|Z_i| = 1$, $1 \leqq i < \infty$.

$$A_n = \max_{|Z|=1} \left| \prod_{i=1}^{n} (Z - Z_i) \right|$$

Igaz-e, hogy $\limsup_{n=\infty} A_n = \infty$? E kérdés nem látszik könnyűnek.

I. 26. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$ oly sorozat, melyre

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i, \qquad \varepsilon_i = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \tag{1}$$

összegek mind különbözők. L. Moser bebizonyította, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \geqq \frac{4^k - 1}{3} \tag{2}$$

egyenlőség, csak ha $a_i = 2^{i-1}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

(1)-ből könnyen adódik, hogy

$$k < \frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log \log x}{2 \log 2} + O(1). \tag{3}$$

$\frac{\log \log x}{2 \log 2}$ javítása nem látszik könnyűnek. $k < \frac{\log x}{\log 2} + 0(1)$ sejtés még nincs eldöntve. Könnyen belátható, hogy ha $a_1 < \ldots$ végtelen sorozat, melyre az (1) alatti összegek minden k-ra különbözők, akkor végtelen sok k-ra $a_k \geqq 2^{k-1}$.

I. 27. Nagyon érdekes kérdésekre jutunk, ha végtelen sorozatokat is megengedünk. Legyen $a_1 < a_2 < \ldots$ végtelen sorozat, melyre az $a_i + a_j$ összegek mind különbözők. E sorozatokat Sidon, ki tudtommal elsőnek foglalkozott e kérdésekkel, B_2 sorozatoknak nevezte. Legyen

$$A(x) = \sum_{a_i \leqq x} 1$$

Fennáll

$$\liminf_{x=\infty} A(x)/x^{1/2} = 0 \tag{1}$$

sőt

(2)
$$\liminf_{n=\infty} A(x)(\log x)^{1/2}/x^{1/2} < \infty$$

lehet, hogy (2) még élesíthető, de ez eddig nem sikerült s talán nehéz lesz. Megadható viszont oly B_2 sorozat, melyre

(3)
$$\limsup_{x=\infty} A(x)/x^{1/2} \geqq 1/2.$$

Ugyanazzal a módszerrel, melyre (1) és (2) bizonyítható, kimutattam, hogy egy B_2 sorozatra

(4)
$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{\log x} \sum_{a_i<x} 1/a_i^{1/2} = 0.$$

(3) miatt viszont van olyan B_2 sorozat, melyre $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i^{1/2}$ divergens. (4) valószínűleg élesíthető, de nem tudom, hogy mennyire. Krickeberg bebizonyította, hogy van oly B_2 sorozat, melyre

(5)
$$\limsup A(x)/x^{1/2} \geqq 2^{-1/2}.$$

(5) talán tovább élesíthető, de Turánnal bebizonyítottuk, hogy $A(x) < x^{1/2} + O(x^{1/4})$.

Chowla és Mian rekurzióval a következő módon definiáltak egy B_2 sorozatot: $b_1 = 1$, tegyük fel, hogy $b_1, \ldots, b_{v-1}$ már definiálva van. b_v a legkisebb szám, mely nem állítható elő $b_i + b_j - b_l$, $1 \leqq i, j, l \leqq v-1$ alakba. Krickeberg $v = 25\,000$-ig kiszámította b_v-t, valószínűnek látszik, hogy ha $\varepsilon > 0$ elegendő kicsi, akkor $v > v_0(\varepsilon)$-ra $b_v > v^{1/2+\varepsilon}$, de még

(6)
$$\lim_{v=\infty} b_v/v^2 = \infty$$

sincsen bebizonyítva. Könnyű oly b_v sorozatot konstruálni, melyre $b_v < v^3$ minden v-re, azaz $A(x) = O(x^{1/3})$, de nem sikerült eddig oly B_2 sorozatot konstruálni, melyre $b_v = o(v^3)$. Rényivel bebizonyítottuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra van oly $a_1 < a_2 < \ldots$ sorozat, melyre ha $i > i_0(\varepsilon)$, $a_i < i^{2+\varepsilon}$ és $f(n) < c_\varepsilon$ minden n-re, ahol $f(n)$ jelenti az $n = a_i + a_j$ egyenlet megoldásainak számát. Turánnal sejtettük, hogy ha minden n-re $f(n) > 0$, akkor

(7)
$$\limsup_{n=\infty} f(n) = \infty.$$

Valószínűnek látszik, hogy (7) már akkor is következik, ha csak azt tesszük fel, hogy $a_k < ck^2$ minden k-ra, de (1) szerint az $a_k < ck^2$ feltevésből csak azt tudjuk, hogy az $a_i + a_j$ összegek nem lehetnek mind különbözőek.

E kérdések igen nehezeknek látszanak. Érdekes, hogy a problémák multiplikativ analogonjait sikerült elintéznem. (Lásd I. 13).

P. Erdős and P. Turán, On a problem of Sidon in additive number theory and some related problems, J. London Math. Soc. 16(1941), 212—215, lásd még ugyanott 19(1944) 208.

F. Krickeberg, B_2 Folgen und verwandte Zahlenfolgen, J. reine u. angew. Math. 206(1961) 53—60.

A. Stöhr, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe, J. reine u. angew. Math 194(1955), 132—134.

I. 28. Heilbronnal a következő tételeket bizonyítottuk be: Legyen $k/p^{2/3} \to \infty$ (p prímszám), és $r_1, \ldots, r_k$ k különböző maradék mod p. Minden t-re a

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i r_i \equiv t \pmod p, \qquad \varepsilon_i = 0 \quad \text{vagy} \quad 1$$

kongruencia megoldásainak száma $(1+o(1))2^k/p$. A $k/p^{2/3} \to \infty$ feltétel nem javítható, $k > cp^{2/3}$ nem elég.

Ha $k > 3\sqrt{6}\, p^{1/2}$, akkor az (1) kongruenciák minden t-re megoldhatók, ez valószínűleg már $k > 2p^{1/2}$ esetén is igaz.

Sejtettük még, hogy ha $r_1, \ldots, r_k$ különböző maradékok mod n és $k > cn^{1/2}$, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i r_i \equiv 0 \pmod n, \qquad \varepsilon_i = 0 \quad \text{vagy} \quad 1$$

megoldható. Flohr és én ezt csak $k > cn^{\alpha}$ esetén bizonyítottuk be, ahol α, $\frac{1}{2}$-nél nagyobb állandó.

P. Erdős and H. Heilbronn, On the addition of residue classes mod p, Acta Arithmetica, 9(1964), 149—59.

I. 29. és I. 30. M. G. Murdeshwar disszertációjában Czipszer és az én eltolási problémámmal kapcsolatos több eredményt élesített s számos új problémát vet fel.

M. G. Murdeshwar, Thesis, Univ. of Alberta, Edmonton 1964. Murdeshwar eredményei rövidesen publikálva lesznek.

I. 34. Hanani sejtette, hogy ha $a_1 < a_2 < \ldots$ és $b_1 < b_2 < \ldots$ két végtelen sorozat, melyekre minden n előállítható $a_i + b_j$ alakba, akkor ha $A(x) = \sum_{a_i < x} 1$ és $B(x) = \sum_{b_j < x} 1$

$$(1) \qquad \limsup_{x=\infty} A(x)B(x)/x > 1.$$

Narkiewicz (1)-et néhány speciális esetben bebizonyította, de Danzer (1)-et megcáfolta. Danzerrel sejtettük, hogy ha minden n-re $n = a_i + b_j$

megoldható és $\lim_{x=\infty} A(x)B(x)/x=1$, akkor

$$\lim_{x=\infty}\bigl(A(x)B(x)-x\bigr)=\infty \tag{2}$$

E sejtést Sárközi és Szemerédi nemrég bebizonyították.

Meglepő, hogy a következő egyszerű kérdést nem sikerült elintéznem. Van-e oly $a_1<\ldots<a_k\leqq x$, $k>cx/\log x$, hogy minden $m<x$ 2^u+a_i alakban előállítható. Lorenz általános tétele csak

$$k<cx\log x/\log x\text{-et ad.}$$

L. Danzer, Über eine Frage von Hanani aus der additiven Zahlentheorie, J. reine u. angew. Math. 214—215 (1964), 392—397.

W. Narkiewicz, Remarks on a conjecture of Hanani in number theory, Colloqu. Math. 7 (1960), 161—165.

P. Erdős, Some results on additive number theory, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 847—853.

G. G. Lorenz, On a problem of additive number theory, Ibid. 838—891.

2.

1. Legyen $a_1<a_2<\ldots$ oly végtelen sorozat, melynek egyik tagja se osztható a másikkal, ily sorozatot primitív sorozatnak fogjuk nevezni. Besicovitch volt az első, aki bebizonyította azt a váratlan tényt, hogy egy primitív sorozat felső sűrűsége lehet positív, sőt, ha $\alpha<\frac{1}{2}$, akkor van oly primitív sorozat, melynek felső sűrűsége α, de minden primitív sorozat felső sűrűsége $<\frac{1}{2}$. Behrend és én bebizonyítottuk, hogy minden primitív sorozat alsó sűrűsége 0, pontosabban Behrend bebizonyította, hogy

$$\sum_{a_i<x} 1/a_i< c_1\log x/(\log\log x)^{1/2} \tag{1}$$

és Pillai bebizonyította, hogy minden x-hez van oly primitív $a_1<\ldots<$ $<a_k<x$, melyre

$$\sum_{a_i>x} 1/a_i > c_2\log x/(\log\log x)^{1/2} \tag{2}$$

Sárközi, Szemerédi és én kimutattuk, hogy

$$\lim_{x=\infty}\max\sum_{a_i<x} 1/a_i\,\frac{(\log\log x)^{1/2}}{\log x}=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}. \tag{3}$$

(3)-ban a maximum az összes $a_1<\ldots<a_k\leqq x$ primitiv sorozatra van kiterjesztve. Mint már I.-ben megjegyeztem, nem látszik könnyűnek meghatározni, mely primitív sorozatra maximális $\sum_{a_i\leqq x} 1/a_i$.

Sárközi, Szemerédi és én kimutattuk, hogy végtelen primitív sorozatra

$$(4) \qquad \sum_{a_i<x} 1/a_i = o\left(\log x/(\log\log x)^{1/2}\right)$$

továbbá kimutattuk, hogy (4) nem javítható.

Én bebizonyítottam, hogy minden primitív sorozatra

$$(5) \qquad \sum_i 1/a_i \log a_i < C$$

ahol C abszolút konstans. Nem tudom, mekkora $\sum_i 1/a_i \log a_i$ maximális értéke, talán $\sum_p 1/p \log p$.

Talán érdekes lenne a következő kérdést vizsgálni: Legyen $b_1 < b_2 <$ végtelen sorozat. Mikor létezik $a_1 < \ldots$ primitív sorozat, melyre $a_k < cb_k$? E kérdés valószínűleg igen nehéz lesz.

Davenport és én bebizonyítottuk, hogy ha $a_1 < \ldots$ végtelen sorozat, melyre fennáll végtelen sok x-re

$$(6) \qquad \sum_{a_i<x} 1/a_i > c\log x$$

ahol van egy végtelen részsorozat a_{i_k}, melyre $a_{i_k}/a_{i_{k+1}}$. Sárközi, Szemerédi és én azt is bebizonyítottuk, hogy ha (6) helyett végtelen sok x-re

$$\sum_{a_i<x} 1/a_i \log a_i > c\log\log x$$

áll fenn, akkor az $a_{i_k}/a_{i_{k+1}}$ részsorozat úgy választható, hogy végtelen sok k-ra $a_{i_k} < \exp\exp c_1 k$ ($\exp z = e^z$).

Továbbá azt is bebizonyítottuk, hogy ha $a_1 < \ldots$ alsó sűrűsége pozitív, akkor

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{a_i|a_j \\ a_j<x}} 1 = \infty.$$

Legyen $\alpha_1 < \ldots$ valós számok végtelen sorozata, melyre minden i, j, k egész számokra

$$(7) \qquad |k\alpha_i - \alpha_j| \geqq 1.$$

Fennáll-e ekkor (1) és (5)? Ha az $\alpha - k$ egész számok, akkor (7) azt jelenti, hogy egy α sem osztható egyetlen másikkal. Azt se sikerült bebizonyítanom, hogy (7)-ből következik, hogy

$$\sum_{\alpha_i<x} 1/\alpha_i \log \alpha_i = o(\log\log x).$$

vagy

$$\sum_{\alpha_i<x} 1/\alpha_i = o(\log x).$$

Sárközi, Szemerédi és én bebizonyítottuk, hogy ha $a_1 < \ldots$ pozitív alsó sűrűségű, akkor $[a_i, a_j] = a_r$ mindig megoldható különböző számokban. Kérdezhetjük, maximálisan hány szám adható meg x-ig úgy, hogy $[a_i, a_j] = a_r$ ne legyen megoldható különböző egész számokban.

F. Behrend, On sequences of numbers not divisible one by another, J. London Math. Soc. 10 (1935) 42—45.

P. Erdős, Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, ibid. 126—128.

H. Davenport and P. Erdős, On sequences of positive integers, Acta Arithmetica 2 (1937) 147—151, lásd még Indian J. of Math. 15 (1951) 19—24.

Sárközivel és Szemerédivel való eredményeink még nincsenek publikálva.

Végül még egy megjegyzés: Legyen $a_1 < a_2 < \ldots$ végtelen sorozat, melyre $a_i \cdot a_j \neq a_r$. Könnyű belátni, hogy e sorozat sűrűsége < 1, de 1-hez tetszőlegesen közel jöhet. Könnyű belátni, hogy a felső sűrűség kisebb, mint $1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r / a_1^r$, s ezen értékhez tetszőlegesen közel jöhet. Mily nagy lehet az alsó sűrűség?

2. Legyen $a_1 < \ldots < a_n$ különböző számok sorozata. Jelölje $f(n; a_1, \ldots, a_k)$ az $n = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i = 0$ vagy 1 egyenlet megoldásainak számát. Moserral sejtettük, hogy

$$f(n; a_1, \ldots, a_k) < c 2^k / k^{3/2}. \tag{1}$$

(1) helyett csak

$$f(n; a_1, \ldots, a_k) < c 2^k (\log k)^{3/2} / k^{3/2}$$

bizonyítása sikerült. Sárközi és Szemerédi azonban nemrég bebizonyították (1)-et. (Acta Arithmetica, XI (1965), 205-208)

Nem lehetetlen, hogy ha $k = 2l + 1$, akkor

$$\max_{n;\, a_1, \ldots, a_{2l+1}} f(n; a_1, \ldots, a_{2l+1}) = f(0; -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l) \tag{2}$$

(2) bebizonyítása nem sikerült, s nem sikerült $f(0; -l, \ldots, 0, \ldots, l)$-re formulát találni. (van Lint aszimptotikus formulát talált).

Valószínűnek látszik, hogy az

$$n = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = t$$

egyenletrendszer megoldásainak száma $< c 2^k / k^2$.

Legyen $a_1 < \ldots < a_n$. Moserrel bebizonyítottuk, hogy mindig van egy részsorozat $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, $k \geq \frac{n}{3}$, melyre $a_{i_{j_1}} + a_{i_{j_2}} \neq a_{i_{j_3}}$, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \leq j_3 \leq k$, $\frac{n}{3}$ bizonyára javítható lesz, azonban A. J. Hilton kimutatta, hogy $7n/15$-nél több már nem igaz még akkor sem, ha csak a $j_1 \neq j_2$ összegeket engedjük meg. Hilton példája

$$100^r t, \quad 0 \leq r \leq \frac{n}{15}, \quad 1 \leq t \leq 12, \quad \text{továbbá} \quad t = 14, 16, 17.$$

P. Erdős, Extremal problems in number theory, Proc. Symp. Pure Math. Vol. VIII. Theory of Numbers, 181—189, e cikkben több ide vonatkozó probléma van diszkutálva.

3. Grünwald Géza és Lázár Dezső kérdezték: Mekkora az a legnagyobb $f(k)$ szám, melyre megadható $a_1 < \ldots < a_{f(k)}$ úgy, hogy a $\prod_{1 \leq i \leq j \leq f(k)} (a_i + a_j)$ szorzatnak legfeljebb k prímfaktora van. Turánnal bebizonyítottuk, hogy

$$c_1 k \log k < f(k) < 3 \cdot 2^{k-1}$$

Surányi szerint $f(k) \leq 2^k$, de $f(k)$ valódi nagyságrendjéről sejtelmünk sincsen.

Nem tudok csak k-tól függő $g(k)$-t találni, melyre ha $a_1 < \ldots < a_{g(k)}$; $b_1 < \ldots < b_{g(k)}$ két sorozat, akkor a $\prod_{1 \leq i,\, j \leq g(k)} (a_i + b_j)$ szorzatnak k-nál több prímfaktora van. Igen valószínű, hogy ily $g(k)$ létezik.

Bebizonyítottam, hogy ha $a_1 < \ldots$ végtelen sorozat, akkor az $a_i + a_j$ számok közül mindig kiválasztható egy végtelen részsorozat úgy, hogy egyik tagja se osztható egyetlen másikkal, sejtettem, hogy ugyanez igaz az $a_i + b_j$ számokra, de Trostrum ezt megcáfolta.

P. Erdős and P. Turán: On a problem in the elementary theory of numbers, Amer. Math. Monthly 41 (1934) 608—610.

P. Erdős ibid 57 (1950) 567.

G. B. Trostrum, On sequences of integers, Mathematica 5 (1958) 38—39.

4. Legyen $m \leq n$ s $f(n)$ legyen az a legkisebb szám, hogy minden m-re van oly u, v, melyre

$$0 \leq u, v \leq f(n), \; (m+u, m+v) = 1.$$

Moser és én kimutattuk, hogy végtelen sok n-re

$$f(n) > (1-\varepsilon)(\log n / \log\log n)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Másrészt kimutattam, hogy minden n-re

$$(2)\qquad f(n) < c \log n/\log\log n \left(c < \frac{\pi^2}{12}+\varepsilon\right),\quad \text{ha}\quad n > n_0(\varepsilon).$$

(1) és (2) között jelentős hézag van, melyet nem lesz könnyű áthidalni. E kérdés úgy keletkezett, hogy Moser kérdezte, van-e tetszőlegesen nagy négyzet a síkban, hogy a négyzetben levő rácspontok koordinátái ne legyenek relatív prímek.

P. Erdős, On an elementary problem in number theory, Can. Math. Bull. 1 (1958), 5—8.

5. Legyen $n_1 < \dots$ véges vagy végtelen sorozat. Mikor adható meg oly $a_1, \dots$ sorozat, hogy az $a_i (\mathrm{mod}\, n_i)$ kongruenciákhoz ne legyen oly u, mely egynél több kongruenciát kielégít? Nyilván $\sum 1/n_i \leqq 1$ és $(n_i, n_j) > 1$ szükséges feltételek. I. 21-ben Steinnel sejtettük, hogy minden ε-hoz van oly x_0, hogy ha $x > x_i$, akkor $\sum_{n_i < x} 1 < \varepsilon x$ teljesül.

6. Legyen $a_1 < \dots < a_k \leqq n$ tetszőleges sorozat, $b_1 < \dots$ legyen azon számok sorozata, melyek legalább egy a-nak többszörösei. Igaz-e, hogy minden $m > n$ esetén

$$(1)\qquad \frac{B(m)}{m} < \frac{2B(n)}{n},\quad B(x) = \sum_{b_i \leqq x} 1.$$

(1) ha igaz, nyilván nem javítható, az $a_1 < \dots$ sorozat álljon csak az a_1-ből, $n = 2a_1 - 1$, $m = 2a_1$. Megjegyezhetjük még, hogy nincs oly $\varepsilon > 0$, melyre

$$B(m)/m > \varepsilon B(n)/n$$

minden $a_1 < \dots < a_k \leqq n$ sorozatra, s $m > n$-re fennálljon. Legyenek ugyanis az a-k az $n/2$ és n közötti számok és legyen $m = m(n)$ elegendő nagy. Ha $n > n_0(\varepsilon)$, akkor $B(m)/m < \varepsilon/2$. (P. Erdős, Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, J. London Math. Soc. 10 (1935), 126—128.

7. Jelölje $f(n; a_1, \dots, a_k)$ azon számok számát n-ig, melyek legalább egy a-val oszthatók. Mekkora $\big(k + f(n; a_1, \dots, a_k)\big)/n$ maximuma, ha $[a_i, a_j] > n$, $1 \leqq i \leqq j \leqq k$? Mekkora a maximum, ha $a_i \nmid a_j$, $1 \leqq i < j \leqq k$?

8. $g(n)$ legyen az a legkisebb szám, melyre az $n, n+1, \dots, n+g(n)$ számok legalább egyike foglaltatik a többi szorzatában. Könnyű belátni, hogy $g(k!) = k$ és ha $n > k!$, akkor $g(n) > k$.

Be tudom bizonyítani, hogy végtelen sok n-re

$$(1)\qquad g(n) > \exp\left((\log n)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right).$$

$g(n)$-re nincs jó felső becslésem. Be tudom bizonyítani, hogy $g(n) < cn^{1/2}$, de valószínűleg $g(n) = o(n^{\varepsilon})$, sőt talán $g(n) < \exp\left((\log n)^{1/2+\varepsilon}\right)$, ha $n > n_0(\varepsilon)$. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ azon számok sorozata, melyeknek minden prímfaktoruk $< n^{\varepsilon}$. $g(n) = o(n^{\varepsilon})$ következne, ha be tudnók bizonyítani, hogy

$$\max_{1 \leqq i < k} (a_{i+1} - a_i) < \frac{1}{2} n^{\varepsilon}. \tag{1}$$

(1) bizonyítása azonban valószínűleg nem lesz könnyű (lásd I. 16).

9. Ismeretes, hogy $a(a+d)(a+2d)(a+3d) = k^2$ lehetetlen, tehát négy egymásután következő szám egy számtani sorban nem lehet négyzetszám. $h(k)$ jelentse azt a legnagyobb számot, melyre van egy k tagú számtani sor, mely $h(k)$ négyzetszámot tartalmaz. Sejtettem, hogy $\lim\limits_{k=\infty} h(k)/k = 0$. Rudin sejtette, hogy $h(k) < ck^{1/2}$, de eddig semmit se sikerült bebizonyítani.

10. Legyen $a_1 < \ldots$ véges vagy végtelen sorozat. $f_i(n; a_1, \ldots)$ jelölje azon számok számát n-ig, melyek pontosan i a-val oszthatók. Mekkora

$$\max_{a_1 < \ldots} \lim_{n=\infty} f_i(n; a_1, \ldots)/n = \alpha_i.$$

Bizonnyára $\alpha_1 = \frac{1}{2}$. (D. Lubell ezt nemrég bebizonyította)

11. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$, tegyük fel, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i = \sum_{i=1}^{k} \delta_i a_i \qquad \varepsilon_i = 0 \text{ vagy } 1, \quad \delta_i = 0 \text{ vagy } 1 \tag{1}$$

csak akkor lehetséges, ha $\sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \delta_i$. Bebizonyítottam a Linnik—Rényi-féle nagy szita segítségével, hogy akkor $k < Cx^{5/6}$. A nagy szita Bombieri—Roth-féle élesítésének segítségével bebizonyítottam, hogy $k < Cx^{2/3-\varepsilon}$, lehetséges azonban, hogy $k < Cx^{1/2}$ is fennáll. Talán ha $x = (n+1)^2$, akkor $\max k = 2n+1$. Könnyű belátni, hogy ha ez igaz, akkor nem javítható, mert ha az a-k az $n^2+1, \ldots, (n+1)^2$ számok, akkor ha $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \delta_i > \sum\limits_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i$ akkor, $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \delta_i a_i > \sum\limits_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i a_i$. Könnyű belátni továbbá, hogy ha $a_1 < \ldots < a_k \leqq (n+1)^2$ és ha $\sum\limits_{i=1}^{k} \delta_i > \sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i$ feltételből következik, hogy $\sum\limits_{i=1}^{k} \delta_i a_i > \sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i$, akkor $k \leqq 2n+1$.

Straus sejti: Legyen $a_1 < \ldots < a_k$, akkor az $a_{i_1} + \ldots + a_{i_r}$, $i_1 < \ldots < i_r$ alakú összegek legalább $rk - \binom{r}{2} - r + 1$ különböző számot állítanak elő. Egyenlőség csak akkor, ha az a-k számtani sort alkotnak. Straus megjegyzi, hogy e sejtésből $k < Cx^{1/2}$, $c < (\sqrt{3}+\varepsilon)$-al könnyen következik. (Straus sejtését nemrég bebizonyította)

12. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$.

$$Q(b, p) = \sum_{a_i \equiv b (\mathrm{mod}\ p)} 1$$

A nagy szitával kapcsolatos vizsgálataiban Rényi bebizonyította, hogy

$$\sum_{p < n^{1/3}} p \sum_{b=0}^{p-1} \left(Q(b, p) - \frac{k}{p} \right)^2 < c_1 kn. \tag{1}$$

A legutóbbi időben Barban, Roth és Bombieri lényegesen élesítették (1)-et. Roth és Bombieri érték el a legmesszebbmenő eredményeket. Először Roth bebizonyította, hogy (1)-ben $p < n^{1/3}$, $p < n^{1/2}/(\log n)^{1/2}$-el helyettesíthető, s Bombieri ezt $p < n^{1/2}$-re élesítette. Egyszerű valószínűségszámítási meggondolásokkal kimutattam, hogy elegendő nagy c_2-re

$$\sum_{p < c_2 (n \log n)^{1/2}} p \sum_{b=0}^{p-1} \left(Q(b, p) - \frac{k}{p} \right)^2 < c_1 kn \tag{2}$$

nem lehet igaz minden sorozatra, sőt, legfeljebb $o(2^n)$ sorozatra lehet igaz (az összes $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ sorozatok száma nyilván 2^n). (2) bizonyításának csak a gondolatmenetét ismertetem: Egyszerű kombinatorikai vagy valószínűségszámítási okoskodással beláthatjuk, hogy $o(2^n)$ sorozat kivételével minden p-re (k mint ismeretes $o(n)$ sorozat kivételével $\frac{n}{2} + o(n)$)

$$\sum_{b=0}^{p-1} \left(Q(b, p) - \frac{k}{p} \right)^2 > c_2 k \tag{3}$$

(3)-ból (2) azonnal következik a prímszámtételből.

Davenport különben megjegyezte, hogy már a négyzetszámok példája is mutatja, hogy (2) nem igaz, de az én komplikáltabb példámnak talán megvan az az érdekessége, hogy nálam $k > cn$, míg a négyzetszámok kevesen vannak, s így itt a nagy szita hatástalansága kevésbé meglepő.

Barban cikke az Akadémia matematikai intézetének közleményeiben fog megjelenni. K. F. Roth, On the large sieves of Linnik and Rényi, Mathematika 12 (1965), 1—9.

13. Elliot bebizonyította, hogy ha $n > n_0(\varepsilon)$ és $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$, $k > (2+\varepsilon) \frac{n}{\log n}$, akkor mindig van oly p, melyre az a-k teljes maradék-

sort alkotnak. $2+\varepsilon$ valószínűleg $(1+\varepsilon)$-al helyettesíthető, de e kérdést eldönteni igen nehéz lesz. Davenport adott példát olyan sorozatra, melyben $k=\dfrac{n}{\log n}+o\big(n/(\log n)^2\big)$ és nincs oly p, melyre az a-k teljes maradéksort alkotnak.

Davenport példája: $2n-q$, $n<q<2n$. Nyilván nincs oly a, melyre $a\equiv 2n(\bmod p)$ $\big($ti. $2n-q\not\equiv 2n(\bmod p)\big)$. Nem tudjuk, vajon Davenport példája élesíthető-e, azaz nem tudjuk, mekkora k maximális értéke, melyre van $a_1<\ldots<a_k\leqq n$, s mely egyetlen prímszámra sem ad teljes maradéksort.

Kérdezhetjük még, hogy mily nagynak kell lennie k-nak, hogy az $a_1<\ldots<a_k\leqq n$ sorozathoz legyen legalább két prímszám, p_1 és p_1, melyre az a-k teljes maradéksort alkotnak.

Davenporttal kérdezhetjük: Legyen $k>n^{1/2}$. Van-e akkor oly p, melyre az a-k több mint $(p+1)/2$ maradékosztályban vannak? Mekkorának kell lennie k-nak, hogy legyen egy p, melyre az a-k $p(1-\varepsilon)$ maradékosztályban vannak?

P. D. T. Elliot, On sequences of integers Quarterly J. of Math. 16 (1965), 30—45.

Selfridgetől való a következő kérdés: Legyenek $a_1<\ldots<a_k<2^k$ egész számok és tegyük fel, hogy ha (c_i-k egész számok)

$$\text{(1)} \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i a_i=0 \qquad \text{akkor} \qquad \min_{1\leqq i\leqq k} c_i\geqq -1.$$

Igaz-e, hogy akkor $a_1=2^{k-1}$, $a_2=2^{k-1}+2^{k-2}$, $\ldots$, $a_k=2^k-1$?

Tudtommal e kérdés még nincs elintézve.

Selfridge bebizonyította, hogy ha (1) fennáll, akkor $a_1\geqq 2^{k-1}$ (itt nem kell az $a_k<2^k$ feltevés).

Selfridge problémáján gondolkozva a következő kérdésre jutottam: Legyen $a_1<\ldots<a_k\leqq x$ és tegyük fel, hogy egy a se foglaltatik más a-k összegében. Mekkora k maximuma?

Jelöljük e maximumot $f(x)$-el. Én először azt sejtettem, hogy $f(x)<\dfrac{\log x}{\log 2}+O(1)$.

Graham és Straus azonban kimutatták, hogy sejtésem teljesen elhibázott, ugyanis ők bebizonyítják, hogy ($\exp z=e^z$)

$$\text{(2)} \qquad f(x)>\exp[c_1(\log x)^{1/2}].$$

Nem nehéz bebizonyítani, hogy $f(x)<x^{1-\alpha}$ ha $\alpha>0$ elegendő kicsi. Valószínűnek látszik, hogy $f(x)=o(x^\varepsilon)$.

Graham és Straus a következő érdekes kérdést vetik fel: Legyen $b_1 < \ldots < b_l \leqq x$ és tegyük fel, hogy egy b se számtani közepe más b-knek. Mekkora l maximuma? (lásd I. 8.).

Legyen $\max l = F(x)$. Világos, hogy $F(x) \geqq f(x)$. Graham és Straus kimutatják, hogy

(3) $$F(x) > \exp[c_2 (\log x)^{1/2}]$$

és hogy (3)-ból (2) könnyen nyerhető.

(3)-ra a következő nagyon egyszerű bizonyítást találtam: Legyen $t = t(x)$ egész szám és legyen u meghatározva a következő egyenlőtlenségből

(4) $$\sum_{i=0}^{u-1} t^i \leqq x < \sum_{i=0}^{u} t^i.$$

Legyenek a $b_1 < \ldots < b_l \leqq x$ számok az összes

$$\sum_{i=0}^{u-1} \varepsilon_i t^i, \quad \varepsilon_i = 0 \quad \text{vagy} \quad 1, i = 0, 1, \ldots, u-1$$

alakú számok. Nyilván $l = 2^u$. Legyen ármost t az a legkisebb szám, melyre még fennáll $t > 2^u = l$. Egyszerű számolás mutatja, hogy t ily választása mellett

$$l = \exp[(1+o(1))(\log x \log 2)^{\frac{1}{2}}]$$

és $t > l$ miatt egyszerű meggondolással beláthatjuk, hogy egyetlen b se számtani közepe más b-knek. A részleteket az olvasóra bízzuk.

Valószínűnek látszik, hogy $F(x) = o(x^\varepsilon)$, de itt még $F(x) < x^{1-\alpha}$ sincs bebizonyítva.

I. 8. Igaz-e, hogy minden c és k-hoz van oly n_0, hogy ha $n > n_0$ és $a_1 < \ldots < a_n$ oly valós számok, hogy az $a_j - a_i$ különbségek között legfeljebb cn különböző van, akkor az a-k tartalmaznak k-tagú számtani sort?

$k = 3$-ra ez talán Roth módszerével igazolható, de az általános eset ha igaz, igen nehéznek látszik. Talán visszavezethető $r_k(n) = o(n)$ sejtésre.

I. 11. Legyenek $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$ valós számok. Tegyük fel, hogy

(1) $$|a_i a_j - a_r a_s| \geqq 1$$

minden $1 \leqq i, j, r, s \leqq k$ értékre. Ha az a-k egész számok, az (1) feltétel épp azt jelenti, hogy az $a_i a_j$ szorzatok mind különbözőek. Mekkora k maximuma?

Ha az a-k egész számok, akkor bebizonyítottam, hogy $\max k = = \pi(x) + O(x^{3/4}/(\log x)^{2/3})$ (lásd I. 11), de az általános esetben $k = o(x)$ bizonyítása se sikerült.

ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ ЧИСЕЛ V. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ II.

Пал Эрдёш

REMARKS ON NUMBER THEORY V.

P. ERDŐS

The author continues the investigation of extremal problems in number theory started in „Remarks on number theory IV", Mat. Lapok 12 (1962), 228—255. In this summary I just state a few of the problems and results considered.

Let $a_1 < \ldots < a_z \leq n$ be a sequence of integers such that the products $\prod_{i=1}^{z} a_i^{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i = 0$ or 1 are all different. Then $z < \pi(n) + c_1 n^{1/2}/\log n$ (this was conjectured in IV). Perhaps $z < \pi(n) + \pi(n^{1/2}) + o(n^{1/2}/\log n)$.

Let $a_1 < a_2 < \ldots$ be an infinite sequence of integers for which the sums $a_i + a_j$ are all distinct. Can one have $a_k = o(k^3)$?

Let $a_1 < a_2 < \ldots$ be an infinite sequence of integres no a divides any other. Sárközi, Szemerédi and I proved (sharpening a previous result of Behrend) that $\sum_{a_i < x} 1/a_i = o(\log (x/\log \log x)^{1/2})$.