Asymptotische Untersuchungen über die Anzahl der Teiler von *n*

Professor C. L. Siegel zu seinem 70. Geburtstag gewidmet

P. Erdös

$d(n)$ sei die Anzahl der Teiler von n. Folgende asymptotische Formel ist wohlbekannt [1]:

$$\sum_{n=1}^{x} d(n) = x \log x + (2C-1)\, x + O(x^{\alpha}),\ \alpha = 15/46 \tag{1}$$

(C ist die Eulersche Konstante).

(1) gilt wahrscheinlich für jedes $\alpha > 1/4$; diese alte Vermutung scheint aber sehr tief zu liegen. Linnik und Vinogradoff [2] zeigten, daß für jedes $\alpha > 0$

$$\sum_{u=1}^{x^{\alpha}} d(x+u) < c_{\alpha} x^{\alpha} \log x \tag{2}$$

gilt. Es wäre sehr interessant, (2) zu verschärfen; wahrscheinlich gilt für jedes $\alpha > 0$

$$\sum_{u=1}^{x^{\alpha}} d(x+u) = (1+o(1))\, x^{\alpha} \log x\,. \tag{3}$$

Wenn die Aussage (3) wahr ist, liegt sie wohl sehr tief.

Es sei $f(x) > x^{(\log 2+\varepsilon)/\log\log x}$. Vielleicht gilt

$$\sum_{u=1}^{f(x)} d(x+u) = (1+o(1))\, f(x) \log x\,. \tag{4}$$

(4) ist sicher falsch für $f(x) = x^{\log 2/\log\log x}$ wegen der sehr großen Werte, welche $d(n)$ annimmt, wenn n durch viele kleine Primzahlen teilbar ist [3].

Wir können aber viel schärfere Resultate zeigen, wenn wir (4) nicht für alle, sondern nur für fast alle x fordern. Tsungtao Chih[1] zeigte, daß, wenn $f(x)/(\log x)^6 \to 0$, für fast alle x (i.e. für alle x mit der möglichen Ausnahme von einer Folge der Dichte 0) gilt:

$$\sum_{u=1}^{f(x)} d(x+u) = f(x) \log x + (2C-1)\, f(x) + o\big(f(x)\big)\,. \tag{5}$$

In dieser Arbeit werden wir ein schwächeres Resultat als (5) erhalten, aber unser $f(x)$ wird nicht so rasch gegen unendlich streben müssen. In gewissem Sinne wird unser Resultat bestmöglich sein.

[1] Das Resultat von Tsungtao Chih erschien ohne Beweis in den Comptes Rendus du Premier Congrès des Math. Hongrois 1950. Ich weiß nicht, ob der detaillierte Beweis publiziert ist.

Satz 1. *Es sei $h(x)$ eine beliebige wachsende Funktion, die mit x gegen Unendlich strebt. Es sei*

$$f(x) > (\log x)^{2\log 2 - 1}\, e^{h(x)(\log\log)^{1/2}}.$$

Dann gilt für fast alle x

$$\sum_{u=1}^{f(x)} d(x+u) = (1+o(1))\, f(x)\log x. \tag{6}$$

(6) *läßt sich nicht weiter verschärfen. Ist nämlich*

$$f(x) = (\log x)^{2\log 2 - 1}\, e^{c(\log\log x)^{1/2}},$$

so gilt (6) *nicht mehr für fast alle x.*

Zunächst wollen wir (6) beweisen. Wegen des langsamen Anwachsens von $\log x$ wird es offenbar genügen, wenn wir folgendes zeigen können:

Es sei

$$t = (\log x)^{2\log 2 - 1}\, e^{h(x)(\log\log x)^{1/2}}.$$

Dann gilt für alle $y < x$ mit etwaiger Ausnahme von $o(x)$ Werten von y

$$\sum_{i=1}^{t} d(y+i) = (1+o(1))\, t\log x. \tag{7}$$

(7) würde sofort mit einem von Turán [4] angewendeten Kunstgriff folgen, wenn wir beweisen könnten, daß

$$I(x) = \sum_{y=1}^{x}\left(\sum_{i=1}^{t} d(y+i) - t\log x\right)^2 = o(x(t\log x)^2) \tag{8}$$

gilt. Wir werden jedoch zeigen, daß (8) in dieser Form nicht richtig ist. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} I(x) &= x(t\log x)^2 - 2t^2\log x \sum_{y=1}^{x} d(y) + \\ &\quad + 2\sum_{1\leq i_1 < i_2 \leq t}\ \sum_{y=1}^{x} d(y+i_1)\, d(y+i_2) + t\sum_{y=1}^{x} d^2(y) + o(x^{\varepsilon}). \end{aligned} \tag{9}$$

Das Fehlerglied $o(x^{\varepsilon})$ rührt von den Zahlen $y+i > x$ (diese sind alle $\leqq x+t$) her. Wegen (1) ist nun

$$I(x) = -(1+o(1))\, x(t\log x)^2 + 2\sum_{1\leqq i_1 < i_2 \leqq t}\ \sum_{y=1}^{x} d(y+i_1)\, d(y+i_2) + t\sum_{y=1}^{x} d^2(y). \tag{10}$$

Ein Resultat von Ingham [5] besagt dann für $i_2 - i_1 = k \neq 0$ (k ist unabhängig von x):

$$\sum_{y=1}^{x} d(y+i_1)\, d(y+i_2) = (1+o(1))\, \frac{6}{\pi^2}\sum_{l\mid k}\frac{1}{l}\, x(\log x)^2. \tag{11}$$

Wir brauchen allerdings die Verschärfung, daß (11) für alle $1 \leqq i_1 < i_2 \leqq t$ gleichmäßig gilt. Dies läßt sich aber ohne jede Schwierigkeit mit der Inghamschen Methode zeigen und kann dem Leser überlassen werden. Aus (11) folgt (da $o(1)$ gleichmäßig in i_1 und i_2 ist)

$$\sum_{1\leqq i_1<i_2\leqq t}\sum_{y=1}^{x} d(y+i_1)\,d(y+i_2)=(1+o(1))\frac{6}{\pi^2}\,x(\log x)^2\sum_{1\leqq i_1<i_2\leqq t}\sum_{l\mid i_2-i_1}\frac{1}{l}.$$

Nun gilt

$$\sum_{1\leqq i_1<i_2\leqq t}\sum_{l\mid i_2-i_1}\frac{1}{l}=\sum_{l=1}^{t}\frac{1}{l}\sum_{\substack{i_2-i_1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,l)\\ 1\leqq i_1<i_2\leqq t}}1=\sum_{l=1}^{t}\frac{t^2}{2l^2}+O(t)$$

$$=(1+o(1))\,t^2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l^2}=(1+o(1))\,t^2\,\frac{\pi^2}{12}.$$

Daher ist

$$\sum_{1\leqq i_1<i_2\leqq t}\sum_{y=1}^{x} d(y+i_1)\,d(y+i_2)=(1+o(1))\frac{x}{2}(t\log x)^2. \tag{12}$$

Aus (10) und (12) folgt nun

$$I(x)=t\sum_{y=1}^{x} d^2(y)+o(x(t\log x)^2). \tag{13}$$

(8) würde nun sofort aus (13) folgen, wenn

$$\sum_{y=1}^{x} d^2(y)=o(xt(\log x)^2) \tag{14}$$

gälte. RAMANUJAN [6] zeigte aber, daß

$$\sum_{y=1}^{x} d^2(y)=(1+o(1))\frac{1}{\pi^2}\,x(\log x)^3$$

ist. Also gilt (14) nur für $t/\log x\to\infty$, und um (7) zu beweisen, brauchen wir noch einen neuen Kunstgriff. $v(n)$ sei die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n, und $F(n)$ sei die Anzahl der Primfaktoren von n nach Multiplizität gezählt (also wenn $n=\Pi p_i^{\alpha_i}$, dann ist $F(n)=\Sigma\alpha_i$). Unser entscheidender Hilfssatz besagt nun

Hilfssatz 1.

$$\Sigma_1\, d(y)=(1+o(1))\,x\log x,$$

wo in Σ_1 die Summation über die Zahlen $1\leqq y\leqq x$ erstreckt ist, für welche $F(y)\leqq 2\log\log x+\frac{1}{2}h(x)\,(\log\log x)^{1/2}$ ist.

Der Beweis des Hilfssatzes ist recht einfach. $A(z)$ sei die Anzahl der Zahlen $u<z$, für welche

$$F(u)\geqq \log\log x+\frac{1}{4}h(x)\,(\log\log x)^{1/2}$$

ist. Offenbar gilt

$$\textstyle\sum_2 d(n)\leqq \sum_{t=1}^{x} A\left(\frac{x}{t}\right)+\sum'\left[\frac{x}{t}\right], \tag{15}$$

wo in $\sum_2$ die Summation über die Zahlen $1 \leqq n \leqq x$ läuft, für welche $F(n) > 2 \log\log x + \frac{1}{2} h(x) (\log\log x)^{1/2}$ ist, und in $\sum'$ ist $1 \leqq t \leqq x$, $F(t) \geqq \log\log x + \frac{1}{4} h(x) (\log\log x)^{1/2}$.

(15) folgt sofort durch Umkehrung der Ordnung der Summation und aus der Bemerkung, daß, wenn $n = uw$ und $F(n) > 2 \log\log x + \frac{1}{2} h(x) (\log\log x)^{1/2}$ ist, dann

$$\max(F(u), F(w)) > \log\log x + \frac{1}{4} h(x) (\log\log x)^{1/2}$$

ist. Nach einem bekannten Satz von HARDY und RAMANUJAN [7] gilt

$$A\left(\frac{x}{t}\right) = o\left(\frac{x}{t}\right).$$

Daher ist offenbar

$$\sum_{t=1}^{x} A\left(\frac{x}{t}\right) = o(x \log x). \tag{16}$$

Die Anwendung der Stirlingschen Formel zeigt nun durch eine leichte Rechnung $\left(\text{in } \sum'' \text{ ist } k > \log\log x + \frac{1}{4} h(x) (\log\log x)^{1/2}\right)$

$$\tag{17} \begin{cases} \sum' \left[\frac{x}{t}\right] \leqq x \sum' \frac{1}{t} < x \sum_k'' \frac{1}{k!} \left(\sum_{p,\alpha} \frac{1}{p^\alpha}\right)^k < \\ \qquad < x \sum_k'' \frac{(\log\log x + c_1)^k}{k!} < c_2 x \sum_k'' \frac{e^k (\log\log x + c_1)^k}{k^{k+1/2}} = o(x \log x). \end{cases}$$

Wegen (15), (16) und (17) gilt nun

$$\sum_2 d(n) = o(x \log x). \tag{18}$$

Hilfssatz 1 folgt nun aus (1) und (18).

Jetzt wollen wir (7) beweisen. Zunächst zeigen wir, daß für alle $y < x$ mit etwaiger Ausnahme von $o(x)$ Werten von y (in $\sum_1$ läuft die Summation über die $1 \leqq i \leqq t$, für welche $F(y+i) < 2 \log\log x + \frac{1}{2} h(x) (\log\log x)^{1/2}$ ist):

$$\sum_1 d(y+i) = (1 + o(1))\, t \log x. \tag{7'}$$

Um (7') zu zeigen, setzen wir (wie in (8))

$$\tag{19} \begin{cases} I'(x) = \sum_{y=1}^{x} \left(\sum_1 d(y+i) - t \log x\right)^2 = x (t \log x)^2 - \\ \qquad - 2t^2 \log x \sum_{y=1}^{x}{}_1\, d(y) + 2 \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 \leqq t} \sum_{y=1}^{x}{}_1\, d(y+i_1)\, d(y+i_2) + \\ \qquad + t \sum_{y=1}^{x}{}_1\, d^2(y) + o(x^\varepsilon). \end{cases}$$

Da aber für die y in $\sum_1 F(y) < 2\log\log x + \frac{1}{2}h(x)(\log\log x)^{1/2}$ gilt, ist für diese y wegen $d(y) \leqq 2^{F(y)}$ $(\exp z = e^z)$

$$d^2(y) \leqq d(y)\exp\left(\log 2\left(2\log\log x + \frac{1}{2}h(x)(\log\log x)^{1/2}\right)\right).$$

Daher folgt aus (1) und der Definition von t

$$(20)\quad \begin{aligned} \sum_{y=1}^{x}{}_1 d^2(y) &< (1+o(1))\exp\left(\log 2\left(2\log\log x + \frac{1}{2}h(x)(\log\log x)^{1/2}\right)\right)\sum_{y=1}^{x} d(y) \\ &= o(xt(\log x)^2). \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$2\sum_{1\leqq i_1<i_2\leqq t}\ \sum_{y=1}^{x}{}_1 d(y+i_1)\,d(y+i_2) = T(x).$$

Dann gilt wegen (19), (20) und Hilfssatz 1

$$(21)\qquad I'(x) = -x(t\log x)^2 + T(x) + o(x(t\log x)^2).$$

Wegen (19) ist offenbar $I'(x) \geqq 0$, daher folgt aus (21)

$$(22)\qquad T(x) \geqq (1+o(1))\,x(t\log x)^2.$$

Andererseits aber folgt aus (12) offenbar

$$(23)\qquad T(x) \leqq 2\sum_{1\leqq i_1<i_2\leqq t}\ \sum_{y=1}^{x} d(y+i_1)\,d(y+i_2) = (1+o(1))\,x(t\log x)^2.$$

Aus (22) und (23) folgt aber

$$(24)\qquad T(x) = (1+o(1))\,x(t\log x)^2.$$

Endlich folgt aus (21) und (24)

$$(25)\qquad I'(x) = o(x(t\log x)^2).$$

(7′) folgt aus (25) (wie in [4]) mit Hilfe der Tchebicheffschen Ungleichung.

(7) folgt aus (7′) durch eine leichte Rechnung. Es seien $y_1 < \cdots < y_k \leqq x$ die Zahlen, für welche

$$(26)\qquad \sum_{i=1}^{t}{}_2 d(y_j+i) > \varepsilon t\log x$$

ist (in $\sum_2$ ist die Summation über diejenigen $1 \leqq i \leqq t$ erstreckt, für welche $F(y_j+i) \geqq 2\log\log x + \frac{1}{2}h(x)(\log\log x)^{1/2}$ ist). Um (7) aus (7′) zu gewinnen, genügt es offenbar zu zeigen, daß $k = o(x)$ ist. Offenbar folgt aus (26), (1) und (18)

$$\varepsilon kt\log x < \sum_{j=1}^{k}\ \sum_{i=1}^{t}{}_2 d(y_j+i) < t\sum_{y=1}^{x+1}{}_2 d(y) = o(xt\log x),$$

daher folgt $k = o(x)$ und hiermit ist (7) bewiesen.

Um den Beweis von Satz 1 zu beenden, wollen wir nun zeigen, daß (6) sich nicht verschärfen läßt. Wegen des langsamen Anwachsens von $\log x$ genügt es nachzuweisen, daß, wenn wir

$$t_1 = (\log x)^{2\log 2 - 1} e^{c(\log\log x)^{1/2}}$$

setzen, die Anzahl der Zahlen $y \leqq x$, welche

$$\sum_{i=1}^{t_1} d(y+i) = (1+o(1))\, t_1 \log x \tag{27}$$

nicht befriedigen, nicht $o(x)$ ist.

Um dies einzusehen, bemerken wir zunächst, daß, wenn eine Zahl $y < u \leqq y + t_1$ mit

$$v(u) > 2\log\log x + c(\log\log x)^{1/2} + 1 \tag{28}$$

existiert, offenbar

$$\sum_{i=1}^{t_1} d(y+i) > d(u) \geqq 2^{v(u)} \geqq 2\, t_1 \log x$$

gilt. Also ist (27) für diese Zahlen nicht befriedigt. Wir können zeigen, daß die Anzahl der Zahlen $y \leqq x$, für welche ein u mit $y < u \leqq y + t_1$ existiert, das (28) befriedigt, größer als $c_3 x$ ist. Doch ist der Beweis recht mühsam, und wir können auch ohne diesen Satz durchkommen.

Wir werden annehmen, daß (27) für fast alle $y \leqq x$ gilt, und werden daraus einen Widerspruch erhalten. Wenn nämlich (27) für fast alle y wahr wäre, so gäbe es nach dem Gesagten für fast alle $y \leqq x$ kein $y < u \leqq y + t_1$, welches (28) befriedigt. Weiter wäre aber

$$\sum_{y}{}_3 \sum_{i=1}^{t_1} d(y+i) = (1+o(1))\, x t_1 \log x\,, \tag{29}$$

wo in $\sum_3 y$ über die Zahlen $1 \leqq y \leqq x$ läuft, die (27) befriedigen. Nach dem Gesagten folgt aber, daß, wenn y (27) befriedigt, für alle Zahlen $y < u \leqq y + t_1$ gilt:

$$v(u) \leqq 2\log\log x + c(\log\log x)^{1/2} + 1\,. \tag{30}$$

Daher erhalten wir

$$\sum_{y}{}_3 \sum_{i=1}^{t_1} d(y+i) < t_1 \sum_{u=1}^{x+t_1}{}_4 d(u) = t_1 \sum_{u=1}^{x}{}_4 d(u) + o(x^{\varepsilon})\,. \tag{31}$$

In $\sum_4$ läuft u über die Zahlen, für welche (30) gilt. Wegen (29) und (31) folgt endlich

$$\sum_{u=1}^{x}{}_4 d(u) = (1+o(1))\, x \log x\,. \tag{32}$$

Hilfssatz 2.

$$\sum_{u=1}^{x}{}_5 d(u) > c_3\, x \log x\,,$$

wo in $\sum_5$ $v(u) > 2\log\log x + c(\log\log x)^{1/2} + 1$ *ist und* c_3 *nur von* c *abhängt.*

Offenbar gilt (wie in (15))

$$\sum_{u=1}^{x}{}_5\, d(u) > \sum\nolimits_6 B\left(\frac{x}{t}\right), \tag{33}$$

wo in $\sum_6$ t über die Zahlen $1 \leqq t \leqq x$ läuft, für welche $v(t) > \log\log x$ ist und $B\left(\frac{x}{t}\right)$ die Anzahl der Zahlen $y \leqq x/t$ bedeutet, für welche $v(y) > \log\log x + c(\log\log x)^{1/2} + 1$ gilt. Nun folgt aus einem Satz von KAC und mir [8], daß für $t < x^{1/2}$

$$B\left(\frac{x}{t}\right) > c_4 \frac{x}{t} \tag{34}$$

ist, wo c_4 nur von c abhängt. Wegen (33) und (34) folgt daher

$$\sum_{u=1}^{x}{}_5\, d(u) > c_4\, x \sum\nolimits_7 \frac{1}{t}, \tag{35}$$

wo in $\sum_7$ $1 \leqq t \leqq x^{1/2}$ und $v(t) > \log\log x$ ist.

Durch nochmalige Anwendung des Satzes von KAC und mir folgt durch eine leichte Rechnung

$$\sum\nolimits_7 \frac{1}{t} > c_5 \log x\,. \tag{36}$$

Hilfssatz 2 folgt nun sofort aus (35) und (36). Offenbar ist aber

$$\sum_{u=1}^{x} d(u) = \sum_{u=1}^{x}{}_4\, d(u) + \sum_{u=1}^{x}{}_5\, d(u)\,.$$

Daher widersprechen sich (1), (32) und Hilfssatz 2, und damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Mit etwas mehr Mühe könnten wir folgenden etwas stärkeren Satz beweisen.

Satz 2. *Es sei $h(x)$ eine beliebige Funktion, die mit x gegen Unendlich strebt. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ die Dichte der Zahlen x, für welche für jedes*

$$t > (\log x)^{2\log 2 - 1}\, e^{h(x)(\log\log x)^{1/2}}$$

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{t\log x} \sum_{i=1}^{t} d(x+i) < 1 + \varepsilon$$

gilt, immer 1.

Den Beweis, der aus Satz 1 leicht folgt, wollen wir dem Leser überlassen.

Es sei $r(n)$ die Anzahl der Lösungen von $n = u^2 + v^2$. Wir können mit ähnlichen Methoden folgenden Satz beweisen, der ebenfalls bestmöglich ist:

Satz 3. *Es sei $h(x)$ eine beliebige Funktion, die mit x gegen Unendlich strebt. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ die Dichte der Zahlen x, für welche für jedes*

$$t > 2^{\log\log x + h(x)(\log\log x)^{1/2}}$$

$$1 - \varepsilon < \frac{\pi}{4t} \sum_{i=1}^{t} r(x+i) < 1 + \varepsilon$$

gilt, immer 1.

Wir werden Satz 3 hier nicht beweisen, da der Beweis sehr ähnlich (aber etwas mühsamer) dem Beweise von Satz 1 und 2 ist. Anstatt [5] brauchen wir hier einen Satz von ESTERMANN über $\sum_{n=1}^{x} r(n)\, r(n+i)$ [9].

Es sei

$$G(n) = \max\left(\frac{1}{(t+1)\log n} \sum_{i=0}^{t} d(n+i)\right).$$

Wegen (1) gilt für alle n $G(n) \geqq 1$, es scheint wahrscheinlich zu sein, daß $G(n)$ eine Verteilungsfunktion besitzt, also daß die Dichte der Zahlen mit $G(n) < C$ für jedes C existiert und mit $C \to \infty$ gegen 1 strebt. Die Existenz der Dichte konnte ich nicht zeigen, es folgt aber leicht aus (1), daß die untere Dichte der Zahlen mit $G(n) < C$ gegen 1 strebt, wenn $C \to \infty$ strebt.

Eine zahlentheoretische Funktion $g(n)$ heiße multiplikativ, wenn für $(a, b) = 1$ $g(a \cdot b) = g(a) \cdot g(b)$ gilt. Mit Hilfe der in dieser Arbeit angewendeten Methode und mit Hilfe von [10] können wir unschwer den folgenden Satz beweisen.

Satz 4. *Es sei $h(x)$ eine beliebige Funktion, die mit x gegen Unendlich strebt, und $g(n)$ sei eine multiplikative reellwertige Funktion, für welche die Reihen*

$$\sum_{p,\alpha} \frac{g(p^\alpha) - 1}{p^\alpha} \quad \text{und} \quad \sum_{p,\alpha} \frac{(g(p^\alpha) - 1)^2}{p^\alpha} \tag{37}$$

konvergieren. Bekanntlich [10] *existiert dann der Mittelwert*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(k) = \alpha, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq \infty.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist die Dichte der Zahlen x, für welche für alle $t > h(x)$

$$(1-\varepsilon)\,\alpha < \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} g(x+i) < (1+\varepsilon)\,\alpha$$

gilt, immer 1.

Satz 4 läßt sich für die Funktionen $\varphi(n)$ und $\sigma(n)$ anwenden.

Für die reell-wertigen multiplikativen Funktionen, die (37) befriedigen, können wir mit den Methoden von [11] zeigen, daß

$$\max_t \frac{1}{t+1} \sum_{i=1}^{t} g(n+i)$$

eine Verteilungsfunktion hat, doch ist der Beweis recht mühsam.

Wahrscheinlich gilt Satz 4 für alle nicht-negativen multiplikativen Funktionen, die einen endlichen von 0 verschiedenen Mittelwert besitzen. Wenn wir aber die Bedingung der Positivität fallen lassen, kann ich nichts Vernünftiges beweisen, selbst für die Funktionen $\mu(n)$ und $\lambda(n)$ nicht.

Literatur

[1] CHIH, T. T.: The Dirichlet's divisor problem. Science report of Tsing Hua Univ., pp. 402—427 (1950); siehe auch: RICHERT, H. E.: Verschärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem. Math. Z. **58**, 204—218 (1953).

[2] VINOGRADOV, A. I., and JU. V. LINNIK: Estimate of the sum of the number of divisors in a short segment of an arithmetic progression. Uspehi Mat. Nauk **12**, no. 4 (76), 277—280 (1957).

[3] RAMANUJAN, S.: On highly composite numbers. Collected papers, Cambridge 78—128 (1927).

[4] TURÁN, P.: On a theorem of Hardy and Ramanujan. J. London Math. Soc. **9**, 274—276 (1934).

[5] INGHAM, A. E.: Some asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London Math. Soc. **2**, 202—208 (1927).

[6] RAMANUJAN, S.: Some formulae in the analytic theory of numbers. Collected papers, Cambridge 133—136 (1927).

[7] Siehe [4].

[8] ERDÖS, P., and M. KAC: The Gaussian law of errors in the theory of additive number-theoretic functions. Am. J. Math. **62**, 738—742 (1940).

[9] ESTERMANN, T.: An asymptotic formula in the theory of numbers. Proc. London Math. Soc. **34**, 280—292 (1932).

[10] ERDÖS, P.: Some asymptotic formulas for multiplicative functions. Bull. Am. Math. Soc. **53**, 536—544 (1947).

[11] — On the density of some sequences of numbers III. J. London Math. Soc. **13**, 119—127 (1938); siehe auch ERDÖS, P.: Some remarks about additive and multiplicative functions. Bull. Am. Math. Soc. **52**, 527—537 (1946); und: Some remarks and corrections to one of my papers, ibid. **53**, 761—763 (1947).

Prof. Dr. P. ERDÖS
Mathematisches Institut der Universität Budapest
und Panjab Universität Chandigarh

(Eingegangen am 18. November 1965)