ERDŐS ÉS HAJNAL EGY PROBLÉMÁJÁRÓL

ERDŐS PÁL és JOEL SPENCER

Legyen $\mathscr{S}$ tetszőleges halmaz $f(A)$ egy halmazfüggvény, mely $\mathscr{S}$ minden véges A részhalmazához $\mathscr{S}-A$ egy x elemét rendeli. Ha $\mathscr{S}_1\subset\mathscr{S}$, $\mathscr{S}$ egy tetszőleges részhalmaza, akkor

$$F(\mathscr{S}_1)=\bigcup_{A\subset\mathscr{S}_1} f(A),$$

ahol A végigfut $\mathscr{S}_1$ minden véges részhalmazán. Az $\mathscr{S}_1$ halmazt akkor nevezzük függetlennek, ha $\mathscr{S}_1\cap F(\mathscr{S}_1)$ üres.

Legyen $|\mathscr{S}|=n<\aleph_0$ (azaz $\mathscr{S}$ véges halmaz). $h(n)$ legyen az a legnagyobb szám, hogy minden f függvényre $\mathscr{S}$-nek van egy $\mathscr{S}_1$ független részhalmaza, melyre $|\mathscr{S}_1|\geqq h(n)$. $H(n)$ legyen az a legkisebb szám, melyre van oly f függvény, hogy minden $\mathscr{S}_2\subset\mathscr{S}$ részhalmazra, melyre $|\mathscr{S}_2|\geqq H(n)$, $F(\mathscr{S}_2)=\mathscr{S}$. Erdős és Hajnal bebizonyították, [1] hogy ha $n>n_0(\varepsilon)$, akkor

$$\frac{\log n}{\log 2}<H(n)<\frac{\log n}{\log 2}+\frac{(3+\varepsilon)\log\log n}{\log 2}. \tag{1}$$

Valószínűnek látszik, hogy $\left(H(n)-\dfrac{\log n}{\log 2}\right)\to\infty$, ha $n\to\infty$, de e kérdés még nincs tisztázva. (1)-ből azonnal adódik, hogy

$$h(n)<\frac{\log n+3\log\log n}{\log 2}+o(\log\log n) \tag{2}$$

[1]-ben $h(n)$-re csak nagyon gyenge alsó becslés áll.

Fennáll a következő

Tétel. Legyen $n>n_0(\varepsilon)$. Akkor

$$\frac{\log n-\log\log n}{\log 2}+o(\log\log n)<h(n)<\frac{\log n+3\log\log n}{\log 2}+o(\log\log n).$$

A felső becslés, mint már mondtuk, [1]-ben áll és ezt nem sikerült javítanunk, s így csak az alsó becsléssel foglalkozunk.

Legyen $A\subset\mathscr{S}$, $|A|=r$. Az A halmazt akkor nevezzük rossznak, ha van oly $A_1\subset A$ részhalmaza, melyre

$$|A_1|=r-1 \quad \text{és} \quad A=A_1\cup f(A_1).$$

Az r elemű rossz részhalmazok száma nyilván legfeljebb $\binom{n}{r-1}$. Továbbá nyilván, ha $\mathcal{S}_1$ egyetlen rossz részhalmazt se tartalmaz, akkor (és csakis akkor) $\mathcal{S}_1$ független.

$\mathcal{S}$ azon k elemű részhalmazainak száma, melyek legalább egy rossz részhalmazt tartalmaznak, nyilván legfeljebb

$$\sum_{r=2}^{k} \binom{n}{r-1}\binom{n-r}{k-r} = A_k.$$

Ha $A_k < \binom{n}{k}$, akkor van k elemű független részhalmaz — azaz $h(n) \geqq k$. Mármost nyilván

$$A_k < n^{k-1} \sum_{r=2}^{k} \frac{1}{(r-1)!\,(k-r)!} < n^{k-1} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{3}$$

Továbbá egyszerű számolás adja, hogy ha $k < 2 \log n$ és $n > n_0$, akkor

$$\binom{n}{k} > \frac{1}{2}\frac{n^k}{k!}. \tag{4}$$

(3) és (4)-ből nyerjük, hogy ha

$$\frac{1}{2}\frac{n^k}{k!} > n^{k-1}\frac{2^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{azaz} \quad n > k\,2^k, \tag{5}$$

akkor $A_k < \binom{n}{k}$ és $h(n) \geqq k$. (5)-ből tételünk azonnal következik.

Érdekes lenne $h(n)$-et $o(\log\log n)$ pontossággal meghatározni. Egyelőre nem tudjuk, hogy igaz-e $h(n) > \frac{\log n}{\log 2}$ ha $n > n_j$.

Ha n végtelen számosság, $h(n)$ és $H(n)$ hasonlósága megszűnik, de ezzel e cikkben nem foglalkozunk.

IRODALOM

[1] ERDŐS PÁL és HAJNAL ANDRÁS, Egy kombinatorikus problémáról. Mat. Lapok 19 (1962), 345—348.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭРДЁША И ХАЙНАЛА

П. ЭРДЁШ и Д. СПЕНСЕР

ON A PROBLEM OF ERDŐS AND HAJNAL

P. ERDŐS and J. SPENCER

Let $|\mathcal{S}| = n$, $f(A)$ a set function which maps every subset of $\mathcal{S}$ into an element of $\mathcal{S}$ so that $f(A) \notin A$. A subset B of $\mathcal{S}$ is said to be independent if for every $A \subset B$ $f(A) \notin B$. $h(n)$ is the greatest integer for which for every function f there is an independent set having at least $h(n)$ elements. The authors prove

$$\frac{\log n - \log\log n}{\log 2} + o(\log\log n) < h(n) < \frac{\log n + 3\log\log n}{\log 2} + o(\log\log n).$$

AZ 1970. ÉVI ÁLLAMI DÍJJAL KITÜNTETETT HAJNAL ANDRÁS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

1. A. Hajnal. On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem. Zeitschrift f. Math. Logik u. Grundlagen d. Math. *2* (1956), 131—136.
2. Hajnal, A.—Kalmár, L., Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez. I—II. Mat. Lapok (1956), 26—42, 218—229.
3. A. Hajnal and L. Kalmár. An elementary combinatorical theorem with an application to axiomatic set theory. Publ. Math. 4 (1955—56), 431—449.
4. A. Hajnal and J. Surányi. Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen. Annales Universitatis Sci. Budapestiensis 1 (1958) 113—121.
5. P. Erdős and A. Hajnal. On the structure of setmappings. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9 (1958), 111—130.
6. A. Hajnal. Neumann János axiomatikus halmazelméleti munkásságáról. Mat. Lapok 10 (1959), 5—11.
7. P. Erdős, G. Fodor and A. Hajnal. On the structure of inner set mappings. Acta Sci. Math., 20 (1959), 81—90.
8. P. Erdős and A. Hajnal. Some remarks on set theory VII., Acta. Sci. Math. 21 (1960) 154—163.
9. P. Erdős and A. Hajnal. Some remarks on set theory VIII., Michigan Math. Journ. 7 (1960), 187—191.
10. P. Erdős and A. Hajnal. On the topological product of discrete compact spaces, General Topology and its relations to Modern Analysis and Algebra. Proceedings of Symposium in Prague in September 1961, 148—151.
11. A. Hajnal. Some results and problems in set theory. Acta Math. Sci. Hung. 11 (1960), 277—298.
12. A. Hajnal. Proof of a conjecture of S. Ruziewicz. Fundamenta Math. 50 (1961) 123—128.
13. A. Hajnal. On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1961) 321—376.
14. P. Erdős and A. Hajnal. On a property of families of sets. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1961), 87—123.
15. J. Czipszer, P. Erdős and A. Hajnal. Some extremal problems on infinite graphs. Publications of the Math. Inst. of the Hungarian Academy of Science 7 Ser. A. (1962), 441—457.
16. P. Erdős and A. Hajnal. Some remarks concerning our paper „On the structure of set mappings". Acta Math. Sci. Hung. 13 (1962) 223—226.
17. P. Erdős and A. Hajnal. On a classification of denumerable order types and an application to the partition calculus. Fundamenta Math. 51 (1962) pp. 117—129.
18. K. Corrádi and A. Hajnal. On the maximal number of independent circuits in a graph. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1963) 423—439.

19. P. Erdős and A. Hajnal. On complete topological subgraphs of certain graphs. Annales Univ. Sci. Bp. 7 (1964) 143—149.
20. P. Erdős and A. Hajnal. Some remarks on set theory IX. Michigan Math. Journ. 11 (1964), 107—127.
21. A Hajnal. Remarks on a theorem of W. P. Hanf. Fundamenta Math. 54 (1964), 109—113.
22. P. Erdős, A. Hajnal and J. W. Moon. A problem in graph theory. American Math. Monthly. 71 (1964). 1107—1110.
23. A Hajnal. On the topological product of discrete spaces. Notices of the Am. Math. Soc. (1964).
24. A. Hajnal. A theorem on k-Saturated graphs. Canadian Math. Journ. (1964).
25. P. Erdős, A. Hajnal and R. Rado. Partition relations for cardinal numbers. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16 (1965), 93—196.
26. P. Erdős and A. Hajnal. On a problem of S. Jònsson. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences 14 (1966), 19—23.
27. P. Erdős and A. Hajnal. On chromatic number of graphs and setsystems. Acta Math. Acad. Sci. Hung. (1966) 17, 61—99.
28. P. Erdős, A. Hajnal and E. C. Milner. On the complete subgraphs of graphs defined by systems of sets. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17 (1966), 159—229.
29. P. Erdős and A. Hajnal. On decomposition of graphs. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18 (1967) 359—377.
30. A. Hajnal and I. Juhász. Some results in set theoretical topology. Doklady Akad. Nauk USSR (oroszul) 172 (1967), 541—542. és Soviet Math. Dokl. 8 (1967), 141—143. (angol fordítás.)
31. A. Hajnal and I. Juhász. On discrete subspaces of topological spaces. Indag. Math. 29 (1967), 343—356.
32. P. Erdős and A. Hajnal. On the chromatic number of infinite graphs. Graph theory Symposium held in Tihany, Hungary 1966, 83—98.
33. A. Hajnal and Gy. Petruska. Remarks on Darboux functions. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969) 13—20.
34. P. Erdős, A. Hajnal and E. C. Milner. On sets of almost disjoint subset of a set. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 19 (1968) 209—218.
35. A. Hajnal and I. Juhász. Some remarks on a property of topological cardinal functions. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969), 25—37.
36. G. Fodor and A. Hajnal. On regressive functions and α-complete ideals. Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences. 15 (1967), 427—432.
37. Erdős Pál, Hajnal András. Kromatikus gráfokról, Mat. Lapok 18 (1967) 1—4.
38. Hajnal András. A kontinuumproblémára és a kiválasztási axiómára vonatkozó axiomatikus vizsgálatok történetéről és jelenlegi állásáról. Mat. Lapok 17 (1966), 253—260.
39. A. Hajnal and I. Juhász. On hereditarily α-Lindelöf and hereditarrily α-separable spaces. Annales Univ. Budapestiensis, 11 (1968), 115—124.
40. P. Erdős and A. Hajnal. Unsolved problems in set theory. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XIII. Providence, R. I. (1971) pp. 17—48.
41. A. Hajnal, I. Juhász. Discrete subspaces of topological spaces II. Indagationes Mathematicae. 31 (1969), 18—30.
42. P. Erdős, A. Hajnal and E. C. Milner. A problem on well ordered sets. Acta Math. Acad. Sci. Hung 20 (1969), 323—329.
43. Erdős Pál, Hajnal András. Egy kombinatorikus problémáról. Matematikai Lapok 19 (1968), 345—348.

44. A. Hajnal. On some combinatorial problems involving large cardinals. Fundamenta Math. 69 (1970), pp. 39—53.
45. A. Hajnal. Ulam-matrices for inaccessible cardinals. Bull. Acad. Pol. des Sci. 17 (1969), pp. 683—688.
46. A. Hajnal, E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. Combinatorial Theory and its applications. Balatonfüred, Hungary (1969) pp. 601—623.
47. P. Erdős, A. Hajnal, E. C. Milner. Set mappings and polarized partitions, ibidem. pp. 327—363.
48. A. Hajnal, Vera T. Sós. On a problem of bypartite graphs, ibidem.
49. P. Erdős, A. Hajnal. Some results and problems for certain polarized partitions. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 21 (1970) pp. 369—392.
50. Hajnal A., Jelentés az 1968. évi Schweitzer Miklós Matematikai emlékversenyről. Mat. Lapok.
51. A. Hajnal, E. C. Milner. Some theorems on scattered order types. P. M. H. 1 (1971), pp. 55—63.
52. P. Erdős, A. Hajnal, E. C. Milner. Polarized partition relations for ordinal numbers. Studies in pure mathematics. Academic Press, pp. 63—87.
53. P. Erdős, A. Hajnal. Ordinary partition relations for ordinal numbers. P. M. H. 1 (1971) 171—185.
54. P. Erdős, A. Hajnal, E. C. Milner. Partition relations for η_α sets. Hausdorff Memorial volume (megjelenés alatt).
55. A Hajnal. A negative partition relation. Proceedings of the National Academy 68 (1971), pp. 142—144.
56. P. Erdős, A. Hajnal. Problems and results in finite and infinite combinatorial analysis. Annals of the New York Academy of Sciences 175 (1970), pp. 115—124.
57. A. Hajnal, I. Juhász. Discrete subspaces and de Groot's conjecture about the number of open subsets. Proceedings of the International Symposium on Topology and its Applications, Belgrad (1969), 179.
58. A. Hajnal, E. C. Milner, E. Szemerédi. A cure for the telephone disease. Research paper No. 106, Yellow Series of The University of Calgary, January 1971. Can. Math. Bull. (megjelenés alatt).
59. A. Hajnal and I. Juhász. On disjoint representation of ultrafilters. Hausdorff Memorial Volume 33 (1971) 457—463
60. A. Hajnal and I. Juhász. On some consequences of Martin's axiom. Indagationes Math (megjelenés alatt).
61. J. Baumgartner and A. Hajnal. A proof (involving Martin's Axiom) of a partition relation. Fundamenta Math. (megjelenés alatt).
62. P. Erdős, E. Fried, A. Hajnal and E. C. Milner. Some remarks on simple tournaments. Algebra Universalis (megjelenés alatt).

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ АНДРАША ХАЙНАЛА

THE LIST OF WORKS OF A. HAJNAL