Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'études de Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° G7, 5 p.

1er décembre 1976

PROBLÈMES EXTRÉMAUX ET COMBINATOIRES EN THÉORIE DES NOMBRES

par Paul ERDÖS

(rédigé par Jean-Louis NICOLAS)

1. - Il est connu que la densité asymptotique des entiers ayant deux diviseurs d_1 et d_2 vérifiant $d_1 < d_2 < 2d_1$ existe (cf. [4], et le livre de HALBERSTAM et ROTH [10], p. 262, théorème 14). Soit

$$F(n) = \max_t (\sum_{t/2<d\leq t, d|n} 1) .$$

L'énoncé précédent revient à dire

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x} . \sum_{F(n)>1, n\leq x} 1) = c .$$

P. ERDÖS a conjecturé que $c = 1$, c'est-à-dire que presque tous les entiers ont deux diviseurs d_1 et d_2 tels que $d_1 < d_2 < 2d_1$.

On peut conjecturer aussi que, pour k fixé, presque tous les entiers vérifient $F(n) > k$. Soit

$$d^+(n) = \sum_{k;2^k<d\leq 2^{k+1}, d|n} 1 \qquad \text{et} \qquad d(n) = \sum_{d|n} 1 .$$

On conjecture que, pour presque tout n, $\lim_{n\to\infty} \frac{d^+(n)}{d(n)} = 0$.

2. - Pour chaque entier n, appelons t_n le plus petit entier vérifiant

$$(t_n + 1)t_n \equiv 0 \mod n .$$

Ainsi, si n est premier, $t_n = n - 1$; si $n = x(x + 1)$, $t_n = x$.

P. ERDÖS et R. R. HALL ont montré que (non encore publié)

$$\lim \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} \frac{t_n}{n} = 0 ;$$

ce qui était une conjecture d'ERDÖS.

3. - Rappelons la définition suivante, liée au théorème de Van der Waerden (cf. [5] ou [13] pour un historique plus détaillé).

<u>Définition</u>. - On désigne par $r_k(n)$ le nombre maximum de termes d'une suite finie $(a_i)_{1\leq i\leq \ell}$ vérifiant $1 \leq a_1 < a_2 \dots < a_\ell \leq n$, et ne contenant pas une progression arithmétique de k termes.

E. SZEMEREDI a marqué une étape importante dans cette étude en démontrant que, pour tout k fixé (cf. [13]),

Secrétariat mathématique
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 PARIS CEDEX 05

$$\lim_{n\to\infty} r_k(n)/n = 0 .$$

CONJECTURE (primée 15 000 francs). - <u>Soit une suite</u> (a_i) <u>d'entiers positifs vérifiant</u> $\sum \frac{1}{a_i} = +\infty$. <u>Alors, pour tout</u> k , <u>on peut trouver</u> k <u>éléments de cette suite en progression arithmétique</u>.

Cette conjecture permettrait de démontrer qu'il existe des progressions arithmétiques arbitrairement longues formées uniquement de nombres premiers.

Dans l'autre sens, on peut définir :

$$A_k = \sup \sum \frac{1}{a_i}$$

le "sup" étant pris sur l'ensemble des suites (a_i) ne contenant pas de progression arithmétique de k termes.

A l'aide du résultat de BERLEKAMP [2] qui montre qu'on peut partager les entiers n , $1 \leq n \leq k2^k$, en deux classes ne contenant aucune progression arithmétique de k termes, on peut montrer que

$$A_k \geq (1 + O(1))\, k \,\frac{\log 2}{2} .$$

Très récemment, J. GERVER a observé, dans un article à paraître dans les Proc. Amer. math. Soc., que, pour p premier, l'ensemble

$$S_p = \mathbb{N}^* - \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{n \,;\; jp^i - p^{i-1} + 1 \leq n \leq jp^i\}$$

ne contenait aucune progression arithmétique de p termes, et que l'on a

$$\sum_{n\in S_p} \frac{1}{n} > p \log p - \frac{2}{p-1} ,$$

ce qui assure, pour k assez grand, $A_k \geq (1 - \varepsilon)\, k \log k$.

4. - <u>Suites primitives</u> : soit $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$. Trouver la plus grande valeur de k tel que chaque a_i ne divise pas le produit des autres. La réponse est

$$k = \pi(n) = \text{nombre de nombres premiers} \leq n .$$

En effet, si $a_i \nmid \prod_{j\neq i} a_j$, il existe un nombre premier p_i divisant a_i avec un exposant maximum :

$$\forall\, j \neq i ,\quad v_{p_i}(a_i) > v_{p_i}(a_j) .$$

Ceci implique qu'il ne peut y avoir plus de a_i que de nombres premiers $\leq n$.

On appelle suite primitive (cf. [10], p. 244) une suite a_i telle que, pour tout $i \neq j$, $a_i \nmid a_j$. Le plus grand nombre possible de termes d'une suite primitive inférieurs à $2n$ est n , réalisé avec $n + 1, \dots, 2n$. Si, en effet, on avait plus de $(n + 1)$ termes $a_i \leq 2n$, en écrivant $a_i = 2^{\alpha_i} b_i$, b_i impair, il y aurait $(n + 1)$ valeurs possibles de b_i et les b_i sont tous $\leq n$.

On montre que pour toute suite primitive, la série $\sum 1/(a_i \log a_i)$ est convergente (cf. [7], et [10], th. 2, p. 245).

Soit maintenant

$$f(n) = \max \sum_{a_i \leq n} \frac{1}{a_i} ,$$

le maximum étant pris pour toutes les suites primitives. On a

$$f(n) = (1 + o(1)) \frac{\log n}{\sqrt{2\pi \log \log n}} .$$

Mais probablement, il n'existe pas de solution simple qui réalise le maximum. On consultera sur ce sujet l'article de synthèse [8].

On peut transposer le problème à une suite de nombres réels a_i. La condition $a_i \nmid a_j$ se traduit par

$$|ka_i - a_j| \geq 1 \quad \text{pour tout } i , j , k \text{ entiers} .$$

A-t-on, pour une telle suite,

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{\log x} \sum_{a_i < x} \frac{1}{a_i}\right) = 0 \quad ?$$

HAIGHT [London] a démontré que si les a_i sont rationellement indépendants, et $a_1 < a_2 < \dots$, alors :

$$\lim_{k \to \infty} a_k/k = \infty .$$

Le cas vraiment difficile semble être le cas où les a_i sont rationnels.

5. - Soit $(n + 1)$ nombres entiers vérifiant :

$$2 \leq a_1 < \dots < a_{n+1} \leq 2n .$$

Il y en deux qui sont relativement premiers. En effet, il y en a deux qui sont consécutifs. Cette réponse fut donnée par PÓSA à l'âge de 12 ans.

CONJECTURE. - Soit $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$ une suite d'entiers telle qu'on ne peut pas trouver r nombres a_i qui soient deux à deux relativement premiers. On obtient la plus grande valeur de k en considérant tous les nombres qui ont au moins un facteur premier $\leq p_{r-1}$; où $2, 3, \dots, p_{r-1}$ sont les $(r - 1)$ premiers nombres premiers.

6. - Soit S un ensemble fini à n éléments. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq t}$ une famille de parties de S telle que $A_i \subset A_j$ ne soit jamais vérifié pour $i \neq j$. Le théorème de Sperner dit que le nombre t d'éléments d'une telle famille vérifie

$$t \leq \binom{n}{[n/2]} \qquad (\text{cf : [8], t. 2, p. 114}) .$$

Soit maintenant une famille de parties de S : $(A_i)_{1 \leq i \leq t}$, vérifiant $A_{i_1} \cup A_{i_2} \neq A_{i_3}$ lorsque i_1, i_2 et i_3 sont distincts.

D. KLEITMAN [12] a démontré que l'on avait

$$t \leqslant 2\sqrt{2}\binom{n}{[n/2]}$$

P. ERDÖS a conjecturé que le coefficient $2\sqrt{2}$ pouvait être remplacé par $1 + o(1)$, et KLEITMAN l'a récemment démontré.

7. - BAUMGARTNER et HINDMAN ont démontré (cf. [11] et [1]) le résultat suivant : si l'on partage l'ensemble $\underset{\sim}{N}$ des entiers en k classes, il existe une suite infinie $a_1 , \ldots , a_n$ appartenant à l'une des classes telle que toutes les sommes $\sum \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i = 0$ ou 1 soient dans la même classe.

Mais on ne sait pas si, lorsqu'on divise $\underset{\sim}{N}$ en deux classes, il y a une suite infinie (a_n) telle que $a_i + a_j$ et $a_i a_j$ $(1 \leqslant i < j)$ soient tous dans la même classe.

Autre question : On divise les entiers en deux classes. Est-il vrai que, pour tout t , il y a des entiers a_1 , a_2 , $a_1 + a_2$, $a_1 a_2$ tous dans la même classe et plus grand que t ?

GRAHAM a démontré que l'on peut partager les entiers $\leqslant 251$ en deux classes de façon qu'aucune classe ne contienne les 4 nombres : a_1 , a_2 , $a_1 + a_2$, $a_1 a_2$. Si l'on partage les entiers $\leqslant 252$, l'une des classes contient toujours 4 nombres a_1 , a_2 , $a_1 + a_2$, $a_1 a_2$. Malheureusement, il ne peut pas exclure la possibilité que $a_1 = 1$.

8. - Soit n nombres : $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Montrer que, pour $\varepsilon > 0$ et n assez grand, l'ensemble des nombres de la forme $a_i + a_j$ et $a_i a_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, a un cardinal $\geqslant n^{2-\varepsilon}$ (cette conjecture est primée 1 000 francs).

E. SZEMEREDI et P. ERDÖS savent montrer que ce cardinal est toujours plus grand que $nf(n)$ pour une fonction f vérifiant $\lim f(n) = +\infty$. A l'aide des méthodes de théorie additive exposée dans le livre de FREIMAN [9], on peut montrer que le $n^{2-\varepsilon}$ ne peut pas être remplacé par $n^2/\exp(\log n)^{\alpha}$.

Peut-être a-t-on le même résultat plus fort : Soit un graphe de sommet a_1 , a_2 , ... , a_n . Si (a_i , a_j) sont reliés par une arête, on considère les deux nombres $a_i + a_j$ et $a_i a_j$. Si le graphe a k arêtes, on trouve plus que $k^{2-\varepsilon}$ nombres distincts.

9. - Problème de Sidon (cf. [10], chap. II, et [6] p. 227) : Soit une suite infinie $a_1 , \ldots , a_n$ telle que les sommes $a_i + a_j$ soient toutes distinctes. On peut construire une telle suite par récurrence vérifiant $a_k < ck^3$ (CHOWLA a fait les calculs jusqu'à 25 000). Peut-on, pour \$ 100 , en construire une telle que $\lim a_k/k^3 = 0$?

Est-il vrai que, si $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ est une suite infinie d'entiers tels que le nombre de solutions de $n = a_i + a_j$ est inférieur à C , alors la suite peut être partitionnée en $f(C)$ morceaux $\{a_i^{(r)}\}$, $1 \leqslant r \leqslant f(C)$, telle que les sommes $a_i^{(r)} + a_j^{(r)}$ soient toutes distinctes ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUMGARTNER (J. E.). - A short proof of Hindman's theorem, J. of combinatiorial Theory, Series A, t. 17, 1974, p. 384-386.

[2] BERLEKAMP (E. R.). - A construction for partitions which avoid long arithmetic progressions, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 32, 1946, p.331-332.

[3] COMTET (L.). - Analyse combinatoire. - Paris, Presses Universitaires de France, 1970 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 4 et 5).

[4] ERDÖS (P.). - On the density of some sequences of integers, Bull. Amer. math. Soc., t. 54, 1948, p. 685-692.

[5] ERDÖS (P.). - Résultats et problèmes en théorie des nombres, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 14e année, 1972/73, n° 24, 7 p.

[6] ERDÖS (P.). - Some unsolved problems , Magyar Tudomanyos Akad., Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sc., t. 6, 1961, p. 221-254.

[7] ERDÖS (P.). - Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, J. London math. Soc., t. 10, 1935, p. 126-128.

[8] ERDÖS (P.), SARKÖZI (A.) and SZEMEREDI (E.). - On divisibility properties of sequences of integers, "Number theory". Edited by P. Turan [1968, Debrecen.], p. 37-49. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1970 (Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 2).

[9] FREJMAN (G. A.). - Foundations of a structural theory of set addition. - Providence, American mathematical Society, 1973 (Translations of mathematical Monographs, 37).

[10] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences, vol I. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[11] HINDMAN (N.). - Finite sums from sequences within cells of a partition of $\underset{\sim}{N}$, J. combinatorial Theory, Series A, t. 17, 1974, p. 1-11.

[12] KLEITMAN (D.). - On a combinatorial problem of Erdös, Proc. Amer. math. Soc., t. 17, 1966, p. 139-141.

[13] SZEMEREDI (E.). - On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, "Proceedings of the international congress of mathematicians" [1974, Vancouver], p. 503-505 ; et Acta Arithmetica, Warszawa , t. 27, 1975, p. 199-245.

(Texte reçu le 16 juillet 1976)

Paul ERDÖS
Akademia Matematikai Intezete
Realtanoda u. 13-15
H - 1053 BUDAPEST
(Hongrie)