2. STATISZTIKUS CSOPORTELMÉLET ÉS PARTÍCIÓELMÉLET

ERDŐS PÁL és SZALAY MIHÁLY

1. Mielőtt részletesen ismertetnénk TURÁN PÁL eredményeit a címbeli területeken, néhány kiragadott tétel vázlatos kimondásával igyekszünk érzékeltetni a problémakört, a statisztikus jellegű tételek szerkezetét.

A matematika olyan területein, mint pl. a valós függvénytan, a gráfelmélet, gyakoriak és megszokottak olyan jellegű tételek, amelyek a vizsgált objektumokra „viszonylag kevés kivétellel" teljesülnek. Érdemes megemlíteni egy ilyen jellegű algebrai tételt is. B. L. VAN DER WAERDEN bizonyította be 1933-ban, hogy rögzített n-re bizonyos értelemben „majdnem minden" egész együtthatós n-edfokú algebrai egyenlet Galois-csoportja az S_n n-edfokú szimmetrikus csoport. 1944-ben V. L. GONCSAROV megmutatta, hogy S_n majdnem minden eleme (tehát eltekintve legfeljebb $o(n!)$ számú elemtől) „körülbelül" $\log n$ ciklust tartalmaz a kanonikus felbontásában. Tekintsük most S_n-ben az elemek rendjét. E. LANDAU egy ismert tétele szerint

$$\max_{P\in S_n} O(P) = \exp\left\{(1+o(1))\sqrt{n\log n}\right\}, \tag{1.1}$$

tehát *minden* elem rendje jóval kisebb, mint a triviális $n!$ korlát.

TURÁN PÁL a [155] alatti dolgozatban ERDŐS PÁLlal közösen bebizonyította, hogy *majdnem minden* elem rendje még az (1.1)-beli kifejezésnél is jóval kisebb (tehát viszonylag kevés elem rendje juthat akár csak a közelébe is az (1.1)-beli maximumnak), pontosabban tetszőleges $\varepsilon>0$, $\delta>0$ esetén $n>n_0(\varepsilon,\delta)$-ra S_n-nek legalább $(1-\delta)n!$ számú elemére teljesül a következő:

$$\exp\left\{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\log^2 n\right\} \leqq O(P) \leqq \exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\log^2 n\right\}. \tag{1.2}$$

Így még a kis rendű elemek is „kevesen" vannak. Itt hangsúlyozni kell, hogy a kivételes elemeket tekintve, ezek száma meglehetősen nagy lehet, csupán a csoport rendjéhez viszonyítva kicsi. Például S_n-ben az egyetlen n elemű ciklusból álló permutációk száma

$$(n-1)! = \frac{1}{n}\,n!$$

illetve rendje

$$n = \exp\{\log n\}.$$

Tehát ezek nem teljesítik (1.2)-t és elég sokan is vannak, viszont, a csoport rendjével hasonlítva össze, csak $o(n!)$ a számuk. (Ugyanez a példa mutatja, hogy hasonló a helyzet GONCSAROV említett tételénél is.)

A későbbiekben ismertetjük TURÁN PÁL hasonló jellegű eredményeit a rendértékek aritmetikai szerkezetével, ill. konjugált osztályok elemszámával és (elemeinek) rendjével kapcsolatban. Most inkább a [176] alatti (szintén ERDőssel közös) dolgozatának azt az eredményét emeljük ki, amely véges csoportok szimmetrikus csoportokba való beágyazásával kapcsolatos. Közismert, hogy minden legfeljebb n-edrendű csoport beágyazható S_n-be, s természetes kérdés, hogy milyen S_m-re igaz ez $m<n$ esetén. Kommutatív csoportok esetére [176] egyik tétele ad statisztikus választ: Legyen

$$\psi(n)\nearrow\infty, \quad \psi(n)=n^{o(1)}. \tag{1.3}$$

Ekkor majdnem minden legfeljebb n-edrendű kommutatív csoport beágyazható S_m-be, ha

$$m=\left[\frac{n}{\psi(n)}\right], \tag{1.4}$$

s ez lényegében nem is javítható.

A statisztikus csoportelméleti eredmények változatosságát szemlélteti, hogy [176] egy másik tétele logaritmikus aszimptotikát szolgáltat S_n-ben egy P-vel felcserélhető elemek számára, majdnem minden konjugált osztályból vett P-re.

S_n-ben a ciklusfelbontás és a rend kapcsolatára gondolva vagy emlékezve arra, hogy S_n konjugált osztályainak száma éppen az *n particióinak* száma, nem meglepő, hogy a statisztikus csoportelméleti eredmények kapcsolatban vannak pozitív egészek különböző típusú partíciói összeadandóinak viselkedésével, s az ezekre nyert eloszlási tételek önmagukban is érdekesek.

TURÁN PÁL statisztikus csoportelméleti és partícióelméleti eredményeit a [155], [168], [171], [174], [176], [184], [189], [197], [199], [206], [209], [218], [219], [223], [235], [236], [238], [240] alatti dolgozatok tartalmazzák. A bizonyítások változatos segédeszközöket használnak fel az analízisből, számelméletből, kombinatorikából, valószínűségszámításból és algebrából, szerkezetüket tekintve pedig elsősorban számelméleti és részben valószínűségszámítási jellegűek. Figyelembe véve, hogy a témakörben viszonylag kevés hasonló jellegű eredmény született korábban, bízvást mondhatjuk, hogy *a számelmélet egy új, alkalmazásokban gazdag fejezetéről van szó.*

2. A részletes ismertetésre térve, vizsgáljuk S_n elemeinek rendjét. Majdnem minden P-re már említettük az (1.2) becslést, amely azonban még nem a legerősebb. A statisztikus vizsgálatot egyébként D. H. LEHMER azon tapasztalata inspirálta, hogy véletlenszerűen kivett P-re $O(P)$ nagyon kicsi az (1.1)-beli maximumhoz képest.

TURÁN PÁL statisztikus csoportelméleti eredményeinek nagy része egy 7 dolgozatból álló, ERDŐS PÁLlal közös sorozatban szerepel (ld. [155], [171], [174], [176], [197], [206], [209]). Az (1.2) becslés a sorozat I. részében, a [155] alatti dolgozatban szerepel, valamivel erősebb formában, sőt, a bizonyítás tulajdonképpen kiadja a következőt. Ha $\omega(n)\nearrow\infty$ tetszőleges lassan, akkor majdnem minden P-re (tehát legfeljebb $o(n!)$ elem kivételével)

$$\left|\log O(P)-\frac{1}{2}\log^2 n\right|\leqq\omega(n)\log^{\frac{3}{2}} n. \tag{2.1}$$

Érdemes megemlíteni, hogy közben GONCSAROV tételének következő analogonja adódik. Jelöljük $k(P)$-vel a P kanonikus felbontásában szereplő *különböző* ciklushosszak számát. Ekkor majdnem minden P-re teljesül

$$|k(P)-\log n|<\omega(n)\sqrt{\log n}. \tag{2.2}$$

(Ugyanakkor könnyű belátni, hogy *minden* P-re csupán

$$1 \leqq k(P) \leqq \left[\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right]$$

állítható, s mindkét oldalon elérhető egyenlőség.) Az említett különböző ciklushosszak legkisebb közös többszöröse adja $O(P)$-t. [155]-ből az is kiderül, hogy ez a lk.k.t. majdnem minden P-re „lényegében" a szorzattal helyettesíthető.

Hogy (2.1) tovább már nem javítható (amennyiben legfeljebb $o(n!)$ kivételt engedünk meg), azt a sorozat III. részének (ld. [174]) tétele mutatja, mely szerint $O(P)$ „logaritmikus Gauss-eloszlást" mutat, pontosabban, tetszőleges nagy x_0 pozitív számra és $x \in [-x_0, x_0]$-ra $K(n, x)$-szel jelölve azon P-k számát S_n-ben, amelyekre

(2.3) $$\log O(P) \leqq \frac{1}{2}\log^2 n + \frac{x}{\sqrt{3}}\log^{\frac{3}{2}} n$$

teljesül, $[-x_0, x_0]$-ban egyenletesen

(2.4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{K(n, x)}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv.$$

3. A csoportelmélet több kérdésében az $O(P)$ értékénél fontosabb az aritmetikai szerkezete. (Ilyen jellegű tételből nyerte FROBENIUS 1893-ban, hogy minden négyzetmentes rendű véges csoport feloldható.) A. SCHINZEL vetette fel azt a kérdést, vajon igaz-e, hogy majdnem minden P-re $O(P)$ páros. A sorozat II. része (ld. [171]) messzemenő általánosítással válaszolja meg a kérdést. [171] egyik tétele szerint ugyanis, ha $\omega(n)\nearrow\infty$ tetszőleges lassan, akkor *majdnem minden* P-re $O(P)$ osztható *minden* olyan prímhatvánnyal, amely legfeljebb

(3.1) $$\frac{\log n}{\log\log n}\left\{1+3\frac{\log\log\log n}{\log\log n}-\frac{\omega(n)}{\log\log n}\right\},$$

s ez lényegében nem is javítható, mivel [171] egy másik tétele szerint majdnem minden P-re van olyan prímszám, amely legfeljebb

(3.2) $$\frac{\log n}{\log\log n}\left\{1+3\frac{\log\log\log n}{\log\log n}+\frac{\omega(n)}{\log\log n}\right\}$$

és vele $O(P)$ már nem osztható.

Előre adott prímmel való oszthatósággal kapcsolatban érdekes a következő eredmény (ld. [171]) a $\log n$ körüli prímekre. Ha α rögzített pozitív szám, p_0 olyan prím, melyre

(3.3) $$p_0 = (\alpha + o(1))\log n,$$

továbbá $b(n)$ jelöli azon P-k számát, amelyekre $O(P)$ nem osztható p_0-lal, akkor

(3.4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{b(n)}{n!} = \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right),$$

tehát S_n elemeinek egy pozitív százaléka még osztható p_0-lal, de ez már nem állítható majdnem minden elemre.

Ezután meglepő lehet, hogy az $O(P)$ $p_{\max}$ maximális prímfaktora még „majdnem mindig" „igen nagy", pontosabban (ld. [171]), ha $\omega(n) \nearrow \infty$ tetszőleges lassan, akkor majdnem minden P-re

$$n \exp\{-\omega(n)\sqrt{\log n}\} < p_{\max} < n \exp\left\{-\frac{1}{\omega(n)}\sqrt{\log n}\right\} \tag{3.5}$$

(persze szó sincs arról, hogy „majdnem mindig" ugyanaz a prím lépne fel maximálisként).

A következő tétel, mely (3.5) bizonyításához kellett, önmagában is érdekes. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_s$ egészek, melyekre

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_s \leq n. \tag{3.6}$$

Ekkor S_n-ben azon P-k száma, amelyeknek nincs sem a_1, sem a_2, ..., sem a_s hosszúságú ciklusuk a kanonikus felbontásban, legfeljebb

$$n!\left(\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{a_\nu}\right)^{-1}. \tag{3.7}$$

A bizonyításokban alapvető szerepet játszik az a gondolat, mellyel TURÁN PÁL 1934-ben G. H. HARDY és S. RAMANUJAN $\nu(m)$-re (m különböző prímfaktorainak száma) vonatkozó tételét bizonyította, ti. hogy majdnem minden $m \leq n$-re $\nu(m) = (1+o(1))\log\log n$. Számos statisztikus csoportelméleti tételben fordul elő a

$$\sum_{m=1}^{n}\{\nu(m)-\log\log n\}^2$$

kifejezéssel analóg összegek vizsgálata, ami a bizonyítások valószínűségszámítási hátterét mutatja (Csebisev-egyenlőtlenség).

Érdemes még megemlíteni, hogy J. D. DIXON a (3.6)—(3.7) tétel felhasználásával bizonyította be 1967-ben E. NETTO azon sejtését, hogy $P_1, P_2 \in S_n \sim \frac{3}{4}$ valószínűséggel generálják S_n-et.

4. S_n-ben az $O(P)$ értékek statisztikus vizsgálata más szempontok (más „súlyozás") szerint is történhet. Mivel „sok" elemre lehet a rend azonos, a (2.1)-től lényegesen eltérő a helyzet, ha a *különböző* rend-értékeket vizsgáljuk. A sorozat IV. részéből (ld. [176]) kiderül, hogy S_n elemeire a különböző rend-értékek száma

$$\exp\left\{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{n}{\log n}}+O\left(\frac{\sqrt{n}\log\log n}{\log n}\right)\right\}, \tag{4.1}$$

s a lehetséges különböző rend-értékek közül majdnem minden a következő alakú:

$$\exp\left\{(1+o(1))\frac{\sqrt{6}\log 2}{\pi}\sqrt{n\log n}\right\}, \tag{4.2}$$

ami lényegesen nagyobb, mint (1.2), bár még mindig csak kb. négyzetgyöke az (1.1)-beli maximumnak. Mindenesetre a lehetséges rend-értékek többsége csaknem olyan nagy, amilyen nagy csak lehet, viszont a legtöbb P-hez a „kevés" közepes rend-érték tartozik.

Ismét új oldalról világítja meg a rendek eloszlását, ha — $O(H)$-val jelölve S_n egy H konjugált osztályában az elemek közös rendjét — $O(H)$ viselkedését nézzük majdnem minden H konjugált osztályra. A sorozat VII. részének (ld. [209]) eredménye szerint majdnem minden H-ra

$$O(H) = \exp\{(A_0+o(1))\sqrt{n}\}, \tag{4.3}$$

ahol

$$A_0 = \frac{2\sqrt{6}}{\pi}\sum_{j\neq 0}\frac{(-1)^{j+1}}{3j^2+j} \sim 1{,}81.$$

Eszerint a (2.1)-beli jóval kisebb értéket „kevés, de népes" osztály elemei okozzák. (Már ez is felveti majdnem minden H osztály elemszámának kérdését, amire még visszatérünk.) Ha *minden* H-t tekintünk, ezek eléggé különböző elemszámúak lehetnek, így — statisztikusan — $O(H)$ aritmetikai szerkezete várhatóan eltér $O(P)$-étől. Valóban, a sorozat V. részének (ld. [197]) tétele szerint, (3.5)-tel szemben, $\omega(n)\nearrow\infty$ esetén majdnem minden H konjugált osztályra $O(H)$ maximális prímfaktora

$$\frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n-\frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{n}\log\log n+O(\omega(n)\sqrt{n}). \tag{4.4}$$

A sorozat VI. részéből (ld. [206]) kiderül, hogy (3.1)-nek is van analogonja újabb szempontunkból, nevezetesen, $\omega(n)\nearrow\infty$ esetén majdnem minden H-ra $O(H)$ osztható minden olyan prímhatvánnyal, amely legfeljebb

$$\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{n}}{\log n}\left\{1+5\frac{\log\log n}{\log n}-\frac{\omega(n)}{\log n}\right\}, \tag{4.5}$$

s lényegében ez sem javítható (a (3.1)—(3.2)-höz hasonlóan).

5. Külön kiemeljük a sorozat IV. részének (ld. [176]) azon tételét, mely szerint majdnem minden konjugált osztályból vett P-re teljesül, hogy a P-vel felcserélhető S_n-beli elemek száma

$$\exp\left\{(1+o(1))\frac{\sqrt{6}}{4\pi}\sqrt{n}\log^2 n\right\}. \tag{5.1}$$

DÉNES JÓZSEF megjegyezte, hogy (5.1) alkalmazható az $XYX^{-1}Y^{-1}=P$ kommutátoregyenlet megoldásszámának vizsgálatánál.

Fontos következménye (5.1)-nek, hogy S_n majdnem minden konjugált osztálya

$$n!\exp\left\{-(1+o(1))\frac{\sqrt{6}}{4\pi}\sqrt{n}\log^2 n\right\} \tag{5.2}$$

elemet tartalmaz. Ennek egy reprezentációelméleti alkalmazását fogjuk később ismertetni.

6. Az ismertetett eredmények nagy része közvetlenül adja a megfelelő tételeket S_n helyett A_n-re, az n-edfokú alternáló csoportra. Néhány problematikus esetet vizsgál TURÁN PÁL a [184] alatti, DÉNES JÓZSEFfel és ERDŐS PÁLlal közös dolgozatban. Az egyik problémát A_n konjugált osztályszámának meghatározása jelenti. Míg S_n konjugált osztályainak száma az n partícióinak száma, [184] egyik tételéből kiderül, hogy A_n konjugált osztályainak száma lényegében az előbbinek fele, de csak viszonylag durván, valójában valamivel nagyobb. Ezután (5.1) átvihető A_n-re. [184]-ben szerepel a (2.3)—(2.4) következő analogonja is. Rögzített valós x-re jelöljük $F(n, x)$-szel A_n azon P elemeinek számát, amelyekre

$$\log O(P) \leqq \frac{1}{2}\log^2 n + \frac{x}{\sqrt{3}}\log^{\frac{3}{2}} n. \tag{6.1}$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n, x)}{\frac{1}{2}n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv. \tag{6.2}$$

7. A *4.*, *5.* és *6.*-ban ismertetett tételek bizonyításához különböző típusú partíciókra vonatkozó eredményekre volt szükség. Ezek közül most azt a klasszikustól eltérőt említjük meg, mely különböző q_j prímekre

$$q_1^{\beta_1} + q_2^{\beta_2} + \dots + q_l^{\beta_l} \leqq n \tag{7.1}$$

megoldásszámát és majdnem minden megoldásban az összeadandók számát adja meg. (Előbbire [176]-ban a (4.1)-beli kifejezés, utóbbira pedig

$$l = \frac{2\sqrt{6}}{\pi} \log 2 \sqrt{\frac{n}{\log n}} + O(\sqrt{n}\log^{-0{,}73} n) \tag{7.2}$$

adódott.)

A (7.1) probléma elvezetett egy általánosabb partícióelméleti tétel bizonyításához. Ennek (és további partícióelméleti eredmények, újabb alkalmazások) ismertetéséhez részletesebben kell foglalkoznunk pozitív egészek partícióinak néhány típusával.

8. Tekintsük először a klasszikus, Euler óta vizsgált partíciókat, azaz az n pozitív egész

$$n = x_1 + x_2 + \dots, \quad 1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \quad (x_i \text{ egész}) \tag{8.1}$$

alakú előállításait. Ezek $p(n)$ számára G. H. Hardy és S. Ramanujan tétele szerint, nem is a legerősebb alakban,

$$p(n) = \frac{1+o(1)}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}\right). \tag{8.2}$$

(Így S_n konjugált osztályainak száma $p(n)$, és az említett, majdnem minden konjugált osztályra vonatkozó eredmények legfeljebb $o(p(n))$ kivétellel értendők.)

Erdős Pál 1941-ben J. Lehnerrel megmutatta, hogy n majdnem minden (8.1) típusú partíciójában (tehát legfeljebb $o(p(n))$ kivétellel) az összeadandók száma

$$\frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n + O(\omega(n)\sqrt{n}), \tag{8.3}$$

hacsak $\omega(n) \nearrow \infty$.

Hasonló tételek érvényesek az ún. egyenlőtlen partíciókra, tehát az n szám

$$n = y_1 + y_2 + \dots, \quad 1 \leqq y_1 < y_2 < \dots \quad (y_i \text{ egész}) \tag{8.4}$$

alakú előállításaira. Ekkor (8.2), ill. (8.3) megfelelői

$$q(n) = \frac{1+o(1)}{4n^{3/4} \cdot 3^{1/4}} \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{n}\right), \tag{8.5}$$

illetve

$$\frac{2\sqrt{3}\log 2}{\pi} \sqrt{n} + O\left(\omega(n) n^{1/4}\right). \tag{8.6}$$

A (7.1) probléma mutatja, hogy alkalmazási szempontból jelentős (8.4)-nek

$$n \geqq z_1 + z_2 + \dots, \quad 1 \leqq z_1 < z_2 < \dots$$

alakú általánosítása, éspedig abban az esetben, amikor z_i nem akármilyen egész, hanem prímhatvány. Ennek megoldása vetette fel a következő, jóval általánosabb problémát.

Legyen

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \tag{8.7}$$

egészeknek olyan sorozata, melyre

$$A(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqq x} 1 = B\frac{x^\alpha}{\log^\beta x}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}, \quad \alpha, \beta \text{ valós}, \quad 0 < \alpha \leqq 1. \tag{8.8}$$

Jelöljük $F(n)$-nel

$$\begin{cases} \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_j} \leqq n \\ 1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_j \end{cases} \tag{8.9}$$

megoldásszámát és kérdezzük az összeadandók számát majdnem minden megoldásban.

Turán Pál a [199] alatti dolgozatban Erdős Pállal bebizonyította többek között, hogy (8.7)—(8.8) mellett (8.9) majdnem minden megoldásában (tehát legfeljebb $o(F(n))$ megoldástól eltekintve) az összeadandók száma

$$Cn^{\alpha/\alpha+1} \log^{-\beta/\alpha+1} n \{1 + O(\log^{-1/4(\alpha+1)} n)\}, \tag{8.10}$$

ahol C csak B-től, α-tól és β-tól függő explicit konstans.

A (8.8) megszorítást sok (8.7) típusú sorozat triviálisan teljesíti. Például a $\lambda_\nu = \nu$ választással következményeként adódik (8.6) egy gyengébb alakja, és hasonlóképpen teljesül (8.8), amikor (8.7) gyanánt a k-adik hatványokat ($\lambda_\nu = \nu^k$) választjuk, vagy az összes prímeket, vagy az összes prímhatványokat stb.

9. Dénes József vetette fel azt a problémát, hogy adott típusú partíciókra mennyi azon partíció-párok száma, amelyeknek nincsenek egyenlő részösszegeik. Ez a probléma még nincs teljes általánosságban megoldva, ha viszont csak a közös *összeadandókat* vizsgáljuk, erre nézve Turán Pál igen meglepő eredményeket bizonyított [219] és [218] alatti dolgozataiban, nemcsak partíció-párokra, hanem partíció k-asokra is. Nemcsak az derült ki, hogy majdnem minden k-asnak *van* közös összeadandója, hanem elég sok ilyen van.

Foglalkozzunk először a (8.1) típusú partíciókkal, s legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges kicsi, továbbá $k \geqq 2$ rögzített egész. Ekkor a [219] alatti dolgozat egyik tétele szerint majdnem minden partíció k-asban (tehát legfeljebb $o(p(n)^k)$ kivétellel) *legalább* $\left(\frac{1}{k} - \varepsilon\right)$-szor annyi közös összeadandó van (multiplicitással!), mint a k-asban szereplő partíciók maximális összeadandószáma, azaz — (8.3)-mal kombinálva — majdnem minden k-asban *legalább*

$$(9.1)\qquad \left(1-o(1)\right)\frac{\sqrt{6}}{2k\pi}\sqrt{n}\log n$$

közös összeadandó van (multiplicitással).

Még érdekesebb, hogy az előbbi tételnek olyan általánosítása is van (ld. [219]), amikor pl.

$$(9.2)\qquad N\leqq n_1\leqq n_2\leqq\ldots\leqq n_k\leqq N\left(1+o(1)\right)\quad (N\to\infty)$$

esetén az $n_1, n_2, \ldots, n_k$ partícióiból alkotjuk a k-asokat (ekkor érvényes az előbbi állítás megfelelője legfeljebb

$$o\left(p(n_1)p(n_2)\cdot\ldots\cdot p(n_k)\right)$$

kivétellel), s még gyengébb korlátozás esetén is van hasonló becslés.

Azt hihetnénk, hogy e jelenség oka mindössze olyasféle jellegű, hogy a multiplicitás miatt „sok" partícióban eleve sok közös „kicsi" összeadandó van. (Könnyen látható pl., hogy $\omega(n)\nearrow\infty$ esetén majdnem minden (8.1) típusú partícióban legalább $\frac{\sqrt{n}}{\omega(n)}$-szer szerepel az 1 összeadandóként, bár ezek még messze nem adnak $\left(1-o(1)\right)\frac{\sqrt{6}}{2k\pi}\sqrt{n}\log n$ közös összeadandót.)

Így igazán meglepő Turán Pál [218] alatti dolgozatának azon eredménye, mely *egyenlőtlen* (tehát (8.4) típusú) partíciókra ad hasonló tételt, nevezetesen, $\varepsilon>0$, $k\geqq 2$ egész esetén, a (8.4) típusúakból alkotott majdnem minden partíció k-asban (tehát legfeljebb $o\left(q(n)^k\right)$ kivétellel) *legalább* $\left(\frac{1}{k\cdot 2^k\cdot\log 2}-\varepsilon\right)$-szor annyi közös összeadandó van, mint a k-asban szereplő partíciók maximális összeadandószáma, azaz — (8.6)-tal kombinálva — majdnem minden k-asban *legalább*

$$(9.3)\qquad \left(1-o(1)\right)\frac{\sqrt{3}}{\pi k 2^{k-1}}\sqrt{n}$$

közös összeadandó van. (Ennek az eredménynek is van (9.2)-re vonatkozó általánosítása.)

10. Most visszatérünk az (5.2) eredményhez, tehát hogy S_n majdnem minden H konjugált osztályára

$$(10.1)\qquad |H| = n!\exp\left\{-\left(1+o(1)\right)\frac{\sqrt{6}}{4\pi}\sqrt{n}\log^2 n\right\},$$

ahol $|H|$ a H elemszáma.

Ismeretes, hogy S_n páronként nem-ekvivalens, (a komplex test feletti) irreducibilis reprezentációinak száma S_n konjugált osztályainak száma, azaz $p(n)$. Legyenek $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p(n)}$ S_n páronként nem-ekvivalens, irreducibilis reprezentációi, és legyen χ_ν a Γ_ν karaktere. Ekkor (az egyik ortogonalitási relációból)

$$(10.2)\qquad \sum_{\nu=1}^{p(n)}|\chi_\nu(H)|^2=\frac{n!}{|H|}.$$

[219]-ben (10.1) egy alkalmazásaként adódik (10.2)-vel, hogy majdnem minden H konjugált osztályra

$$\max_{\nu} |\chi_\nu(H)| = \exp\left\{(1+o(1))\frac{\sqrt{6}}{8\pi}\sqrt{n}\log^2 n\right\}, \tag{10.3}$$

az E egységosztályra pedig (mely előbb a kivételek közé tartozott)

$$\max_{\nu} |\chi_\nu(E)| = \exp\left\{\frac{1}{2} n\log n - \frac{n}{2} + O(\sqrt{n})\right\}, \tag{10.4}$$

tehát lényegében $\sqrt{n!}$ (a lehetséges maximum $|\chi_\nu(H)|$-ra). Azonban $\chi_\nu(E)$ éppen Γ_ν dimenziója, ezek mindegyike viszont közvetlen kapcsolatban van n (8.1) típusú partícióival, amelyeket most a következő alakban írunk. Legyen

$$\Pi = \left\{\begin{matrix} \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m = n \\ \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_m \geqq 1 \end{matrix}\right\} \quad (\lambda_\mu \text{ egész}), \quad (m = m(\Pi)) \tag{10.5}$$

n egy általános partíciója.

Frobenius és Schur egy tétele szerint létezik olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés n partíciói és S_n irreducibilis reprezentációi között, hogy a Π partíciónak megfelelő Γ_Π-re

$$\dim \Gamma_\Pi = \chi_\Pi(E) = n!\,\frac{\prod\limits_{1\leqq\mu<\nu\leqq m} (\lambda_\mu - \lambda_\nu + \nu - \mu)}{\prod\limits_{\mu=1}^{m} (\lambda_\mu + m - \mu)!}. \tag{10.6}$$

Ha nemcsak a (10.4)-beli maximumra vagyunk kíváncsiak, hanem $\chi_\Pi(E)$ értékére majdnem minden Π-re, akkor a (10.6) formula alkalmazásánál várhatóan sokat kell tudni majdnem minden Π összeadandóiról.

Erdős és Lehner (8.3) tételéből majdnem minden Π-re (a (10.5) jelöléssel)

$$m = \frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n + O(\omega(n)\sqrt{n}), \tag{10.7}$$

hacsak $\omega(n) \nearrow \infty$. Ebből az asszociált partíciók segítségével adódik majdnem minden Π-re az is, hogy a maximális összeadandóra

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n + O(\omega(n)\sqrt{n}). \tag{10.8}$$

Mint Szalay megjegyezte, már a (10.6)—(10.7)—(10.8)-ból nyerhető majdnem minden Π esetén $\chi_\Pi(E)$-re a következő logaritmikus aszimptotika:

$$\chi_\Pi(E) = \exp\left\{\frac{1}{2} n\log n + O(n\log\log n)\right\}, \tag{10.9}$$

ebből pedig (10.3) „fordított"-ja is adódik:

$$\max_{H} |\chi_\nu(H)| = \exp\left\{\frac{1}{2} n\log n + O(n\log\log n)\right\} \tag{10.10}$$

majdnem minden Γ_ν karakterére.

11. (10.9) javításához azonban már viszonylag pontos becslések szükségesek a λ_μ összeadandókra majdnem minden Π-re (sőt — legalább egy részükre — egyenletesen is, hogy (10.6)-ban szimultán alkalmazhatók legyenek), s e becslések önmagukban is érdekesek.

TURÁN PÁL a [235], [236], [240] alatti dolgozatokban SZALAY MIHÁLYlyal közösen vizsgálta az összeadandók eloszlását majdnem minden Π-re, s kiderült, hogy (nem is a legerősebb alakban idézve)

$$\log^6 n \leqq \mu \leqq \frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n - 5\sqrt{n}\log\log n \tag{11.1}$$

esetén

$$\lambda_\mu = \left(1+O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)\frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{n}\log\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{\pi\mu}{\sqrt{6n}}\right)} \tag{11.2}$$

teljesül *egyenletesen* legfeljebb $O\big(p(n)\cdot n^{-1}\big)$ partíció kivételével. (Közben adódott egy új bizonyítás (10.7)—(10.8)-ra kissé általánosabb alakban.) Bár az alkalmazáshoz (11.1)—(11.2) volt fontos, megemlítjük, hogy hasonló (ha nem is egyenletes) becslések adódtak a „komplementer" tartományokra. Ha $\omega(n)\nearrow\infty$, akkor

$$\frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n - 5\sqrt{n}\log\log n \leqq \mu \leqq \frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n - \sqrt{n}\,\omega(n) \tag{11.3}$$

esetén majdnem minden Π-re

$$\lambda_\mu = \exp\left\{\left(\frac{1}{2}\log n - \frac{\pi\mu}{\sqrt{6n}}\right) + O(1)\sqrt{\frac{1}{2}\log n - \frac{\pi\mu}{\sqrt{6n}}}\right\}. \tag{11.4}$$

Ha pedig $B(n)\nearrow\infty$ és

$$B(n) \leqq \mu \leqq \log^6 n, \tag{11.5}$$

akkor majdnem minden Π-re teljesül

$$\lambda_\mu = \frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n - \frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{n}\log\mu + O\big(\sqrt{n}\log\mu\big). \tag{11.6}$$

Ezekkel már lényegesen lehetett javítani a (10.9) becslést, nevezetesen, [240] tétele szerint legfeljebb $O\big(p(n)\cdot n^{-1}\big)$ kivétellel

$$\chi_\Pi(E) = \sqrt{n!}\exp\{-An + O(n^{\frac{7}{8}}\log^4 n)\}, \tag{11.7}$$

ahol A jól definiált pozitív konstans.

ERDŐS PÁL megjegyezte, hogy (11.7)-ben $O\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$ hibatag már nem érhető el a *kitevőben* majdnem minden Π-re, tehát (11.7) nincs túl messze a lehető legjobbtól.

A hosszú ismertetés ellenére korántsem idéztük minden részletében TURÁN PÁL eredményeit a témakörben, de igyekeztünk bemutatni a vizsgálatok változatosságát, számos alkalmazását, s bizonyosak vagyunk benne, hogy ezek az eredmények sok kutatót fognak inspirálni a témakör további vizsgálatára.