Néhány elemi geometriai problémáról

1. 1962-ben e folyóiratban publikáltam egy azonos című cikket.[1] E cikkre mint I-re fogok hivatkozni. E cikkben hasonló természetű problémákkal fogok foglalkozni, de elsősorban néhány I-ben felvetett problémához kell megjegyzéseket fűznöm.

I-ben a következő, Sylvestertől származó problémát említettem: Legyen adva n pont, $P_1, \ldots, P_n$ a síkban. Maximálisan hány olyan egyenes lehetséges, mely e pontok közül pontosan hármon megy át? E probléma még most sincs teljesen megoldva, de *Burr*, *Grünbaum* és *Sloane*[2] egy nemrég megjelent cikkükben sok érdekes eredményt értek el és Sylvester eredményeit messzemenően élesítették.

Sylvester problémájával kapcsolatban I-ben a következő kérdést vetem fel: Mekkora azon egyenesek maximális száma, amelyek az n pont közül pontosan 4-en (illetve általában k-n) mennek át? Azt sejtettem, hogy ez a maximum sokkal kisebb rendű, mint n^2 és talán kisebb, mint cn. Elsősorban *Croft*tal észrevettük, hogy a síkrács pontjai mutatják, hogy meg lehet adni a síkban n pontot úgy, hogy azon egyenesek száma, amelyek e pontok közül pontosan k-n mennek át, nagyobb, mint $c_k n^2$, ahol c_k k-tól függő állandó. c_k pontos értéke nem ismeretes, és *Croft*tal sejtjük, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $k_0 = k_0(\varepsilon)$, melyre minden $k > k_0$ esetén $c_k < \varepsilon / k^2$. Ha viszont feltesszük, hogy $P_1, \ldots, P_n$ olyan, hogy nincs közülük $k+1$ egy egyenesen, akkor valószínűleg tényleg igaz, hogy azon egyenesek száma, melyek közülük k-n mennek át, sokkal kisebb rendű, mint n^2. *Kárteszi*[3] bebizonyította, hogy ezen egyenesek száma nagyobb lehet, mint $c_k n \log n$ és ezt *Grünbaum* $c_k n^{1+1/k}$-ra élesítette. Nem lehetetlen, hogy *Grünbaum* eredménye már közel van ahhoz, hogy éles legyen. Egyelőre azonban még a következő egyszerű kérdésre sem tudjuk a választ: Igaz-e, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy ha $n > n_0$ és $P_1, \ldots, P_n$ n olyan pont (a síkban), melyek közül nincs öt egy egyenesen, akkor azon egyenesek száma, melyek négy P_i-n mennek át, kisebb, mint εn^2.

Elliott[4] bebizonyította, hogy ha $n > 393$ és a síkban adva van n pont, melyek nincsenek mind egy körön, akkor ezek legalább $\binom{n-1}{2}$ kört határoznak

[1] *Erdős Pál*, Néhány elemi geometriai problémáról, Középiskolai Matematikai Lapok 24. (1962) 193–201. és Megjegyzések a „Néhány elemi geometriai problémáról" című cikkhez, 26. (1963) 1–2.

[2] *S. Burr, B. Grünbaum és Sloane*, The orchard problem. S. – Burr munkatársam, a New York-i City College-ben professzor. B. Grünbaum szintén munkatársam, az University of Washingtonban (Seattle) professzor. Sloane a Bell Laboratories matematikai osztályán munkatárs.

[3] *Kárteszi Ferenc*, Sylvester egy tételéről és Erdős egy sejtéséről, Középiskolai Matematikai Lapok, 25. (1963) 3–9.

[4] *P. D. T. A. Elliott*, On the number of circles determined by n points, Acta Math. Sci. Hungar, 18. (1967) 181–188. – Elliott a Boulder University of Colorado-ban professzor, angol matematikus, munkatársam, fő területe az additív számelméleti függvények.

meg. Ezzel egy enyhén módosított formában bebizonyította I-ben kimondott sejtéseim egyikét. ($\binom{n-1}{2}$ az $\binom{n-1}{2}+1$-gyel helyettesíthető, ha azt az egyenest, mely $n-1$ ponton megy át, végtelen sugarú körnek tekintjük.) Az $n>393$ valószínűleg lényegesen javítható.

2. *Corrádi, Hajnal* és én sejtettük, hogy ha $P_1, \ldots, P_n$ n pont a síkban, melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor ezek legalább $n-2$ különböző szöget határoznak meg (a szögek $\geqq 0$ és $\leqq \pi$-nek veendők). Ha még feltesszük, hogy a pontok között nincs három egy egyenesen, akkor egészen egyszerű bebizonyítani, hogy a pontok valóban $n-2$ különböző szöget határoznak meg, és a szabályos sokszög mutatja, hogy $n-2$ pontos. Sajnos azonban az általános esetben semmi elfogadható alsó becslésünk nincs — például azt sem tudtuk eddig bebizonyítani, hogy legalább $n/2$ különböző szöget határoznak meg. E kérdés elintézéséért 1000 forint jutalmat adok.

3. 1932-ben *Klein Eszter* észrevette, hogy ha öt pont van adva a síkban és nincs három egy egyenesen, akkor ezen öt pontból mindig kivehető négy, melyek egy konvex sokszög csúcsai. Az egyszerű bizonyítást az olvasóra hagyjuk. *Klein Eszter* továbbá kérdezte: Van-e olyan $f(n)$, hogy ha a síkban adva van $f(n)$ pont, melyek közül semelyik három sincs egy egyenesen, akkor mindig kivehető közülük n pont, melyek egy konvex sokszög csúcsai? *Szekeres* hámarosan sejtette, hogy $f(n)=2^{n-2}+1$. *Szekeressel* bebizonyítottuk,[5] hogy

$$2^{n-2}+1 \leqq f(n) \leqq \binom{2n-4}{n-2}.$$

Makai Endre és *Turán Pál* bizonyította, hogy $f(5)=9$, de egyelőre $f(6)=17$ nincs meg.

E problémát én happy end problem-nek neveztem, ugyanis *Klein Eszter* „behálózta" *Szekeres Györgyöt* és boldogan élnek Sydney-ben — jelenleg (1980. augusztus) Pesten tartózkodnak.

Mikor 1977-ben meglátogattam Szekereséket, a probléma következő változata jutott eszembe: Létezik-e olyan $F(n)$, hogy ha a síkban adva van $F(n)$ pont, $P_1, \ldots, P_{F(n)}$, melyek közül semelyik három nincs egy egyenesen, akkor kiválasztható-e közülük n pont, melyek olyan konvex n-szöget határoznak meg, mely egyetlen P_i-t sem tartalmaz a belsejében? Azonnal adódik $f(4)=5$-ből, hogy $F(4)=5$ (az egyszerű bizonyítást az olvasóra bízom). De már $F(5)$ létezését nem tudtam bizonyítani. *Ehrenfurt* bebizonyította, hogy $F(5)$ létezik, és *Harborth*[6] bebizonyította, hogy $F(5)=10$. Egyelőre nem tudjuk, hogy $F(6)$ létezik-e. Ugyanis könnyen elképzelhető, hogy minden n-re megadható n pont, $P_1, \ldots, P_n$ a síkban úgy, hogy nincs három egy egyenesen és a P_i-k közül bármely 6 vagy nem alkot konvex hatszöget, vagy ha a hatszög konvex, akkor belsejében van legalább egy másik P_i.

Az $F(6)$-ról való kérdés megoldására 1000 forint jutalmat tűzök ki, $F(n)$ létezésének bizonyításáért 3000 forintot.

---

[5] *P. Erdős and G. Szekeres*, A combinatorial problem in geometry, Compositio Math. 2 (1935) 463—470.

[6] *H. Harborth*, Konvexe Fünfeier in Ebenen Punhkmengen, Elemente der Math. 33 (1978) 116—118.

*Szekeres*sel bizonyítottuk,[7] hogy ha a síkban adott 2^n pont, akkor azok mindig meghatároznak egy szöget, mely nagyobb, mint $\pi(1-1/n)$. E tétel meglepően éles, mert *Szekeres* egy régebbi tétele[8] szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz van 2^n pont úgy, hogy e pontok által meghatározott szögek mind kisebbek, mint $\pi(1-1/n)+\varepsilon$. Első pillanatban azt gondolhatnánk, hogy e tétel annyira éles, hogy további javításra nincs lehetőség. Lehetséges azonban, hogy már 2^n-nél kevesebb pont is biztosít $\pi(1-1/n)$-nél nagyobb szöget. Bizonyítani csak annyit tudunk, hogy már 2^n-1 pont is biztosít egy szöget, mely nagyobb vagy egyenlő, mint $\pi(1-1/n)$. Nem lehetetlen azonban, hogy ha $n > n_0$, akkor már $2^{n-1}+1$ pont is biztosít egy szöget, mely nagyobb, mint $\pi(1-1/n)$.

4. Jelölje $d(P, Q)$ a P és Q pontok távolságát. *Anning* és én még 1945-ben bizonyítottuk,[9] hogy ha $P_1, P_2, \ldots$ végtelen sok pont a síkban úgy, hogy $d(P_i, P_j)$ minden $1 \leq i < j$ számpárra egész szám, akkor pontjaink egy egyenesen vannak. Első bizonyításunk nem volt egész egyszerű, de néhány hónap múlva a következő meglepően egyszerű bizonyítást találtam: Ha pontjaink nincsenek mind egy egyenesen, akkor az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy P_1, P_2, P_3 nincsenek egy egyenesen. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_k$ olyan pontok, melyekre $d(X_i, P_1)$, $d(X_i, P_2)$, $d(X_i, P_3)$ mind egész számok. Bebizonyítjuk, hogy ekkor

$$k \leq 4(d(P_1, P_2)+1)(d(P_1, P_3)+1). \tag{1}$$

(1)-ből *Anning*gel közös tételünk azonnal következik. (1) bizonyítása viszont rendkívül egyszerű. Legyen X olyan pont, melynek távolsága a P_1, P_2, P_3 pontoktól egész szám. A háromszög egyenlőtlenség miatt

$$|d(X, P_1)-d(X, P_2)| \leq d(P_1, P_2),$$

és ezért X $d(P_1, P_2)+1$ darab olyan hiperbola valamelyikén van, melyeknek fókusza P_1 és P_2 (ugyanis minthogy $|d(X, P_1)-d(X, P_2)|$ egész és nem nagyobb, mint $d(P_1, P_2)$, legfeljebb $d(P_1, P_2)+1$ különböző értéket vehet fel). Hasonlóan adódik, hogy X legfeljebb $d(P_1, P_3)+1$ olyan hiperbolán van, melyeknek fókuszai P_1 és P_3. Minthogy P_1, P_2, P_3 nincsenek egy egyenesen, két hiperbola, melyeknek fókuszai P_1, P_2, illetve P_1, P_3, legfeljebb négy pontban metszik egymást. Ebből viszont azonnal nyerjük, hogy az X pont választására legfeljebb $4(d(P_1, P_2)+1)\cdot(d(P_1, P_3)+1)$ lehetőség van, s ezzel (1) be van bizonyítva.

Tudtommal senki sem vizsgálta, vajon az (1) egyenlőtlenség javítható-e és ha igen, mennyire.

Legyen $P_1, P_2, \ldots$ végtelen sok pont a síkban, melyek közül nincs három egy egyenesen. Két ilyen pontot összekötünk egy éllel, ha távolságuk egész szám. Hogyan jellemezhetőek az így nyert gráfok? Előbbi bizonyításunk adja, hogy e gráf nem tartalmazhat egy $K(3, \aleph_0)$ részgráfot, azaz nem lehet benne három szögpont X_1, X_2, X_3 és végtelen sok más szögpont Y_1,

[7] *P. Erdős and G. Szekeres*, On some extremum problems in elementary Geometry, Ann. Univ. Sci. Budapest 3—4 (1961) 53—62.

[8] *G. Szekeres*, On an extremum problem in the plane, Amer. J. Math. 63 (1941) 208—210.

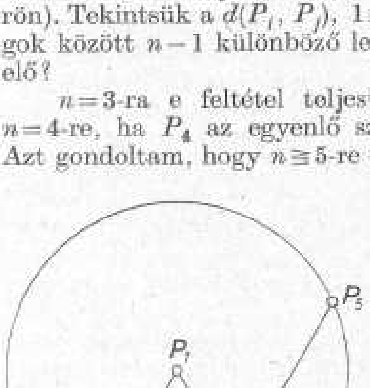
[9] *P. Erdős and A. Anning*, Integral distances, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945) 548—560. és *P. Erdős*, Integral distances, ugyanott 966. — Anning Ann Arborban (University of Michigan) volt matematikus, már 30 éve elhunyt.

$Y_2, \ldots,$ melyek mindegyike az X_i-kel össze van kötve. Nem sikerült eldöntenem, hogy e szükséges feltétel elégséges-e. Az biztos, hogy gráfunk minden n-re tartalmazhat egy n szögpontú teljes gráfot. Nem világos azonban, hogy minden n szögpontú gráf beágyazható gráfunkba (azaz van $P_1, \ldots, P_n$ pont úgy, hogy $d(P_i, P_j)$ akkor és csakis akkor egész szám, ha P_i és P_j a gráfunkban össze van kötve).

Nagyon érdekes problémára jutunk, ha még azt is feltesszük, hogy négy P_i nem lehet egy körön. *Harborth* és mások is bebizonyították, hogy megadható öt pont általános helyzetben (azaz nincs négy egy körön és három egy egyenesen) úgy, hogy bármely kettő távolsága egész szám. Nem ismeretes azonban, hogy megadható-e hat ilyen tulajdonságú pont. Nem lehetetlen, hogy minden n-re megadható n ilyen pont. *Ulam* a következő problémát vetette fel: Van-e a síkban egy mindenütt sűrű ponthalmaz, melyre bármely két pont távolsága racionális szám? (Egy ponthalmaz mindenütt sűrű, ha minden kör belsejében van pontja.) *Ulam* kérdésére a válasz valószínűleg tagadó, de ennek bizonyítása nem látszik könnyűnek. Ismeretes, hogy van olyan r, melyre az r sugarú körön megadható egy mindenütt sűrű ponthalmaz úgy, hogy bármely két pont távolsága racionális. Valószínűnek látszik, hogy ha S egy zárt ponthalmaz a síkban (vagyis S minden konvergens pontsorozatával együtt annak határértékét is tartalmazza), melyre van olyan $S_1 \subset S$, mely S-ben mindenütt sűrűn van és S_1 bármely két pontjának távolsága racionális, akkor ez csak nagyon speciális S halmazokra lehetséges. Biztosra veszem, hogy ez akkor is igaz marad, ha nem ragaszkodunk az $S_1 \subset S$ feltételhez és csak azt kívánjuk, hogy S_1 minden sűrűsödési pontja S-ben legyen. Tudtommal e kérdéseket még nem vizsgálták.

Végül még egy kérdést említek. Legyen adva n pont, $P_1, \ldots, P_n$ a síkban általános helyzetben (azaz nincs három egy egyenesen és négy egy körön). Tekintsük a $d(P_i, P_j)$, $1 \leqq i < j \leqq n$ számokat. Lehetséges, hogy e távolságok között $n-1$ különböző legyen és az i-edik távolság $(n-i)$-szer forduljon elő?

$n=3$-ra e feltétel teljesül, ha a $P_1P_2P_3$ háromszög egyenlő szárú, $n=4$-re, ha P_4 az egyenlő szárú háromszög körülírt körének középpontja. Azt gondoltam, hogy $n \geqq 5$-re ez már nem lehetséges, de *C. Pomerance* $n=5$-re a következő példát találta: P_1 az r sugarú kör középpontja, $d(P_1, P_2) = d(P_1, P_3) = d(P_2, P_3) = r$, P_4 a $P_1P_2P_3$ háromszög körülírt körének középpontja, P_5 a P_3P_4 felező merőlegesének az r sugarú körrel való metszéspontja. Könnyű belátni, hogy ez az 5 pont általános helyzetű és a feltételeinket kielégíti. Az r távolság 4-szer fordul elő, $d(P_1, P_4)$ háromszor, $d(P_3, P_5) = d(P_4, P_5)$. Talán $n \geqq 6$-ra már tényleg igaz, hogy nincs ilyen tulajdonságú pontrendszer, de e kérdést egyelőre nem tudom eldönteni.



Még két megjegyzést szeretnék ehhez a problémához fűzni. Megkövetelhetnénk, hogy három P ne legyen egy egyenesen, négy egy körön és ne legyen olyan kör, melynek középpontja egy adott P_i és amely három másik P-t tartalmaz. $n=4$-re könnyű négy ilyen pontot találni, melyre az i-edik távolság $(i=1, 2, 3)$ $(n-i)$-szer fordul elő, de $n=5$-re ez nem sikerült, és nem tudom, 5 ilyen pont van-e.

Legyen $P_1, \ldots, P_n$ általános helyzetben, nem tudom, hogy legalább hány különböző távolságot határoznak meg. Továbbá kérdezhetjük, hogy ha $P_1, \ldots, P_n$ nem tartalmaz egyenlő szárú háromszöget (azaz minden i-re a $d(P_i, P_j)$, $j=1, 2, \ldots, n$, $j \neq i$ távolságok mind különbözőek), akkor legalább hány különböző távolság fordul elő a $d(P_i, P_j)$, $1 \leq i < j \leq n$ számok között? A választ erre a kérdésre nem ismerjük.

5. Legyenek $P_1, \ldots, P_n$ egy konvex n-szög csúcsai. Sejtettem és *Altman* bebizonyította, hogy a $d(P_i, P_j)$ távolságok között legalább $[n/2]$ különböző van. Egyenlőség áll például a szabályos n-szög esetén.

Továbbá sejtettem, hogy mindig van egy pont, P_i, hogy a $d(P_i, P_j)$ $j=1, 2, \ldots, n$, $j \neq i$ távolságok közül is van legalább $[n/2]$ különböző. E sejtés még nincs eldöntve. Továbbá sejtettem, hogy van egy P_i pont, melytől nincs három másik P_j egyenlő távolságban. E sejtésből az előbbi sejtések könnyen következnének, de legnagyobb meglepetésemre *Danzer* e sejtést megcáfolta. Erre sejtettem, hogy van olyan P_i, melytől nincs négy másik P egyenlő távolságban. *Danzer* ellenpéldája itt már nem működik, de még ha e sejtés igaz is lenne, az már nem következne, hogy van olyan P_i, melytől legalább $[n/2]$ különböző távolság van.

Legyen $g(n)$ az a legnagyobb szám, melyre bárhogyan is adunk meg n különböző $P_1, \ldots, P_n$ pontot a síkban, ezek legalább $g(n)$ különböző távolságot határoznak meg. $g(n)$ meghatározása, sőt jó megbecslése rendkívül nehéz feladatnak látszik. Fennáll a következő becslés:

$$c_1 n^{2/3} < g(n) < c_2 \cdot \frac{n}{(\log n)^{1/2}}. \tag{2}$$

A felső határ (2)-ben tőlem származik, az alsó határ *L. Moser*től.[10] Úgy gondolom, hogy a felső határ közelebb van az igazsághoz, mint az alsó és talán $g(n) > c_3 \cdot n(\log n)^{-1/2}$.

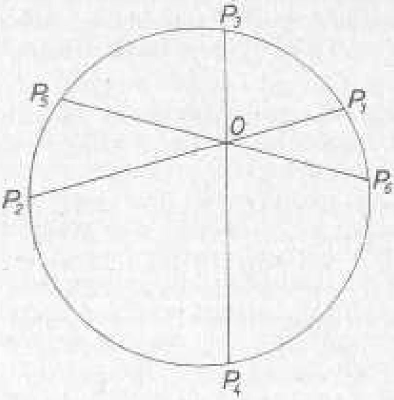
Sajnos e kérdés eldöntése reménytelennek látszik, és 10^4 forintot tűzök ki e kérdés tisztázására.

Sejtettem, hogy minden k-hoz van olyan $\varepsilon > 0$, melyre ha $P_1, \ldots, P_n$ olyan pontrendszer, mely εn-nél kevesebb különböző távolságot határoz meg, akkor van k olyan P_i, melyek egy egyenesen vannak. E sejtésre *Szemerédi Endre* egy meglepően szellemes és egyszerű bizonyítást adott.[11] Továbbá *Szemerédi* sejti *Altman* tételének a következő élesítését: Legyen $P_1, \ldots, P_n$ n pont a síkban úgy, hogy semelyik három nincs egy egyenesen. Ekkor e pontok legalább $[n/2]$ különböző távolságot határoznak meg. Szemerédi bizonyítása azonban csak $[n/3]$-at ad $[n/2]$ helyett. Próbálják bebizonyítani $[n/3]$-at és ha tudják, élesítsék ezt az eredményt.

[10] *P. Erdős*, On sets of distances of n points, Amer. Math. Monthly 53 (1946) 248—250.; *L. Moser*, On the different distances determined by n points, ugyanott 59 (1952) 85—91. — L. Moser kanadai matematikus, munkatársam és jó barátom, ki sajnos idő előtt 1970-ben elhunyt.

[11] Szemerédi tételének bizonyítását lásd *P. Erdős*, On some problems of elementary and combinatorial geometry, Annali di Mat. Ser IV. 103 (1975) 99—108. E cikk sok más problémát és eredményt is tartalmaz. Egy valamivel kisebb, de magyar nyelvű cikkre is hivatkozhatom: *Erdős Pál*, Néhány geometriai problémáról, Mat. Lapok, 8 (1957) 86—92. A legújabb ilyen típusú cikkem: *P. Erdős*, Some combinatorial problems in geometry, Lecture Notes in Math. 792, Geometry and Diff. Geometry, Proc. Haifa, Israel (1979) 46—53.

6. Befejezésül még két problémát említek. *E. Straus* tavaly bebizonyította, hogy ha az egységkörben adva van egy O pont és három tetszőleges húr, P_1P_2, P_3P_4, P_5P_6, melyek az O ponton átmennek, akkor $d(P_1, P_3)+d(P_5, P_2)+d(P_4, P_6)<4$. Könnyű belátni, hogy 4 nem helyettesíthető kisebb számmal. *Straus* bizonyítása trigonometriát és elemi analízist használt, nem sikerült e tételre egy szintetikus geometriai bizonyítást találni — talán valamelyik olvasó ötletesebb, szerencsésebb lesz.



Könnyű belátni, hogy ha $P_1, \ldots, P_n$ egy konvex n-szög csúcsai, akkor a P_iP_j átlók $\binom{n}{4}$ metszéspontot határoznak meg a konvex sokszög belsejében. Jelentse $h(n)$ azt a legnagyobb számot, amelyre a P_iP_j $(1 \leq i < j \leq n)$ átlók legalább $h(n)$ különböző pontot határoznak meg. Határozzák meg $h(n)$-et a lehető legnagyobb pontossággal. Biztosra veszem, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van olyan n_0, hogy ha $n>n_0$, akkor $h(n)\leq(1+\varepsilon)\binom{n}{4}$.

Nem vagyok biztos, hogy ez utóbbi probléma tőlem származik-e vagy olvastam valahol.

Erdős Pál

*

A problémákat bárki megoldhatja. A megoldásokat a következő címre kérjük:

Erdős Pál
MTA Matematikai Kutató Intézet
Budapest, Reáltanoda u. 13—15. 1053

Az 1979/80-as tanévi pontverseny eredménye

2. közlemény

Feladatok

Elérhető maximális pontszám 179, a **H** gyakorlatokkal együtt 206.

III. osztályosok

1. díj (400 Ft) **Horváth István** (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn.) ..... 202 pont
2. díj (300 Ft) **Csere Kálmán** (Veszprém, Lovassy L. Gimn.) ...... 193 pont
3. díj (300 Ft) **Simonyi Gábor** (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn.) .... 192 pont