Bemerkungen über König's Einfluß auf Arbeiten über unendliche Graphen

P. Erdős und T. Gallai

Noch im Jahre 1931 als wir König's Vorlesungen über Graphentheorie zuhörten sagte König daß er den Mengerschen Satz für undendliche Graphen nicht beweisen kann. Bald merkten wir, daß das sogenannte Unendlichkeitslemma von König den Satz für abzählbare Graphen ergibt, dies war aber schon König bekannt. Bald fand ich aber einen anderen Beweis, der den allgemeinen Satz, im Falle daß die trennende Knotenpunktmenge endlich ist, ergab. Der Beweis erschien noch im Buch von König.

Einige Jahre später vermutete ich, daß wenn G ein beliebiger unendlicher Graph ist und Π_1 und Π_2 zwei fremde Knotenpunktmenge von G sind, dann gibt es immer eine trennende Menge von Knotenpunkten $\{x_\alpha\}$, so daß man zu jedem x_α einen durch x_α gehenden $\Pi_1\Pi_2$ -Weg so finden kann, daß diese Wege paarweise fremd seien. Dies ist eine natürliche Verallgemeinerung des Mengerschen Satzes. Leider ist aber diese Vermutung selbst noch für den Fall offen wenn die Menge $\{x_\alpha\}$ abzählbar ist, und vielleicht ist sie sogar schon in diesem Falle falsch. Nor vor Kurzem wurde diese Vermutung für paare Graphen von Aharoni $(V(G)=\Pi_1\cup\Pi_2$, $E(G)\subseteq\Pi_1\times\Pi_2)$ vollständig bewiesen [1].

König's Satz über paare Graphen wurde unabhängig von Hall entdeckt worden (Mariage problem): Es sei $\{A_k\}$ eine emtliche Familie von endlichen Mengen mit der Eigenschaft, daß $\bigcup_{i=1}^{r} A_{R_i}$ für jedes r und alle $\{k_i\}$, $1\leqq i\leqq r$ mindestens r Elemente hat dann (und nur dann) existiert ein gemeinsames Representantensystem, also Elemente $x_k\in A_k$ so, daß für $k \neq \ell$ $x_k \neq x_\ell$ ist. Sehr viel wurde über Verallgemeinerungen dieses Satzes für unendlich viele undendliche Mengen gearbeitet. Die Probleme sind jetzt vollständig gelöst, führen aber selbst schon im abzählbaren Falle zu recht komplizierten Begriffsbildungen, deren Diskussion zu weit führen würde.

De Brujn und ich bewiesen folgenden Satz: Es sei G ein k -kromatischer Graph denn enthält G einen endlichen Teilgraphen dessen kromatische Zahl ebenfalls k ist. Das Unendlichkeitslemma von König ergib diesen Satz leicht wenn G abzählbar ist, aber im allgemeinen Fall ist es wohl am einfachsten den Satz mit Hilfe des Tychonoffschen Satzes (das Produkt beliebig vieler kompakten Räume ist wieder kompakt, dies ist eine Verschärfung des Unendlichkeitslemma von König) zu beweisen.

Übrigens zeigten Hajnal und ich daß der de-Brujn-Erdösscher Satz sich nicht auf unabzählbare chromatische Zahlen verallgemeinern läßt. Wir zeigten daß ein Graph mit $\aleph_2$ Knotenpunkten existiert dessen chromatische Zahl $\aleph_1$ ist, so daß jeder Teilgraph der Mächtigkeit $\leqq\aleph_1$, $\leqq\aleph_2$ chromatisch ist. Hier brauchen wir die Continuumhypothese aber es ist leicht das Gegenbeispiel auch ohne Continuumhypothese zu konstruieren [2].

Wir wollen noch eine andere Frage erörtern. Es sei S eine Menge, zu jedem Element $x \in S$ gehöre eine Teilmenge $f(x)$ von S , $x \notin f(x)$. Es sei weiter $|f(x)| < n$. Eine Teilmenge $S_1 \subset S$ heißt unabhängig wenn für jedes $x \in S_1$, $f(x) \cap S_1 = \emptyset$ ist. Es ist leicht zu sehen daß wenn $n=k$ endlich ist, dann ist S die Vereinigungsmenge von $\leqq 2k-1$ unabhängigen Mengen. Wenn wir nur wissen daß $n=\aleph_0$ ist, so folgt es leicht aus unseren Satz mit de Brujn daß S die Vereinigungsmenge von $\leqq n$ unabhängigen Mengen ist. Ich vermutete daß dies für jedes n wahr ist und dies bewies in 1952 G. Fodor [3].

Durch direkte Anregung von Dénes König gaben Grünwald (Gallai), Weissfeld (Vázsonyi) und ich in 1936 notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein Graph eine beiderseits unendliche Eulerische Linie besitze [4]. Nash-Williams beschäftigte sich ebenfalls mit der Existenz von verschiedenen Linien in unendlichen Graphen. Unter anderem gab er eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß in einem gerichteten Graphen eine beiderseits undendliche gerichtete Eulersche Linie existiere [5].

Im Buch von König steht folgender Satz (S. 220): Es sei G ein regulärer Graph vom unendlichen Grade m; gibt es eine Mächtigkeit $m'<m$ von der Eigenschaft, daß je zwei Knotenpunkte in G durch weniger als m' Kanten verbunden sind, dann zerfällt G in Faktoren ersten Grades. In einer Fussnote zu diesem Satze stellt König die Frage ob die Behauptung des Satzes auch dann noch besteht, wenn die Bedingung des Satzes durch die folgende schwächere Bedingung ersetzt wird: je zwei Knotenpunkte sind durch weniger als m Kanten verbunden. Nun zeigte es sich, daß König's Beweismethode für reguläre Kardinalzahlen eine bejahende Antwort ergibt. Dagegen bewies ich, daß für singuläre Kardinalen die Antwort nein ist. Weiter zeigte ich aber folgenden allgemeinen Satz: Der reguläre Graph G sei vom unendlichen Grade m. Jeder Knotenpunkt von G ist mit m <u>verschiedenen</u> Knotenpunkten verbunden. Dann ist G das Produkt von m linearen Faktoren. Mein Beweis war recht kompliziert, aber Hajós fand einen viel einfacheren Beweis, und dieser ist in meiner Arbiet publiziert [6].

Es war eine interessante mengentehoretische Frage ob das Königsche Unendlichkeitslemma sich für unabzählbare Mengen verallgemeinern läßt. Dies wurde von Aronsajn für $\aleph_1$ wiederlegt [7]. Für welche Kardinalzahlen sich der Königsche Satz verallgemeinern läßt führt zu tiefen mengentheoretischen Problement (large cardinals) deren Diskussion hier zu weit führen würde.

Literaturverzeichnis

[1] R. Aharoni, König's duality theorem for infinite bipartite graphs, Technion Preprint Series No. MT-584, (1984), Technion, Haifa

[2] P. Erdős and A. Hajnal, On chromatic number of graphs and set-systems, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 17 (1966), 61-99.

[3] G. Fodor,

[4] P. Erdős, T. Grünwald und E. Vázsonyi: Über Euler-Linien unendlicher Graphen, Journal of Mathematics and Physics, 17 (1938), 59-75.

[5] C. St. J. A. Nash-Williams: Euler lines in infinite directed graphs, Canad. J. Math. 18 (1966), 692-714.

[6] P. Erdős: Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 127-141.

[7] . Aronsajn: