J. reine angew. Math. **381** (1987), 148—160

Journal für die reine und angewandte Mathematik


# Multiplikative Funktionen auf kurzen Intervallen

Von *Paul Erdös* in Budapest und *Karl-Heinz Indlekofer* in Paderborn

---

## 1. Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir das Verhalten der Summe

$$M(f, x, y) := y^{-1} \sum_{x < n \leqq x+y} f(n)$$

für positivwertige, multiplikative Funktionen $f \geqq 1$, bzw. allgemeiner der Summe

$$M(f, x, y, F) := y^{-1} \sum_{x < n \leqq x+y} f(|F(n)|),$$

wobei $F$ ein irreduzibles, ganzzahliges Polynom ist. Wir setzen dabei voraus, daß der Mittelwert

$$M(f) := \lim_{x \to \infty} x^{-1} \sum_{n \leqq x} f(n) \tag{1}$$

existiert. Dies bedeutet (vgl. z.B. Indlekofer [4]), daß $M(f) \neq 0$ ist und die Reihen

$$\sum_p \frac{f(p)-1}{p}, \quad \sum_p \sum_{k \geqq 2} \frac{f(p^k)}{p^k} \tag{2}$$

konvergieren. Unser Ziel ist es, $y = x^{h(x)}$ möglichst klein zu wählen, so daß die Grenzwerte

$$\lim_{y \to \infty} M(f, x, y) \tag{3}$$

bzw.

$$\lim_{y \to \infty} M(f, x, y, F) \tag{3'}$$

existieren.

Selbst im Falle multiplikativer Funktionen $f$ mit $0 \leqq f \leqq 1$ ist im allgemeinen nichts besseres als $h(x) = 1 + o(1)$, $y = o(x)$ zu erwarten. So existiert nach einem Beispiel von Erdös (vgl. Babu [2], S. 102), für jedes $\delta \in (0, 1)$ eine multiplikative Funktion $f$, die nur die Werte 0 und 1 annimmt, so daß für $y = x^{1-\delta}$ der Grenzwert in (3) nicht existiert, während $M(f) \neq 0$ ist.

Wir setzen deswegen im folgenden (außer in Satz 4) voraus, daß $f$ stark multiplikativ und

$$(4) \qquad f(p) = 1 + \delta(p) \qquad (p \text{ prim})$$

mit $\delta(p) \longrightarrow 0$ (für $p \longrightarrow \infty$) ist. Dies impliziert, daß für jedes $\varepsilon > 0$ $y = x^{\varepsilon}$ gewählt werden kann. Setzt man sonst nichts bzgl. $f(p)$ voraus, so ist dies in gewissem Sinne bestmöglich. Denn für jede fallende Folge $\varepsilon_m \downarrow 0$ existiert eine Funktion $h(x) \downarrow 0$ $(x \longrightarrow \infty)$ mit $h(m) \geqq \varepsilon_m$ und eine Nullfolge $\{\delta(p)\}$, so daß der Mittelwert $M(f)$ existiert, aber

$$\lim_{x \to \infty} x^{-h(x)} \sum_{x < m \leqq x + x^{h(x)}} f(m) = \infty$$

ist.

Nimmt man an, daß $\delta(p)$ monoton ist, so läßt sich viel mehr zeigen. Wir beweisen

**Satz 1.** *Sei $f$ stark multiplikativ, $\delta(p) = f(p) - 1 > 0$ für alle Primzahlen $p$ und $\delta(p) \downarrow 0$ für $p \longrightarrow \infty$. Sei $\omega(x) \uparrow \infty$ und*

$$(5) \qquad h(x) > \omega(x) \cdot \frac{1}{\log\log x} \quad \textit{für} \quad x \longrightarrow \infty.$$

*Existiert dann der Mittelwert $M(f)$, so gilt*

$$(6) \qquad \lim_{x \to \infty} x^{-h(x)} \sum_{x < n \leqq x + x^{h(x)}} f(n) = M(f).$$

**Bemerkung 1.** Satz 1 läßt sich durch eine Modifikation des Beweises verbessern (vgl. Bemerkung 4 am Ende der Arbeit). Bezüglich des bestmöglichen Resultates haben wir folgende

**Vermutung.** *Es sei $f$ wie in Satz 1 und $F(x) := \max_{n \leqq x} f(n)$. Dann existiert der Mittelwert für jedes Intervall der Länge $(F(x))^2$, wenn*

$$\lim_{x \to \infty} F(x) \exp(-(\log x)^{\varepsilon}) = \infty \ (\varepsilon > 0)$$

*ist.*

Auf dieselbe Art beweist man

**Satz 2.** *Seien $f$ und $h$ wie in Satz 1 und sei $F \in \mathbb{Z}[x]$ ein irreduzibles Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Existiert dann der Mittelwert $M(f)$, so existiert der Grenzwert*

$$(7) \qquad \lim_{x \to \infty} x^{-h(x)} \sum_{x < n \leqq x + x^{h(x)}} f(|F(n)|).$$

Ist die Voraussetzung der Monotonie von $\delta(p)$ nicht mehr erfüllt, so läßt sich zeigen

**Satz 3.** *Zu jeder Folge $\varepsilon_m \downarrow 0$ existiert eine Funktion $h(x) \downarrow 0$ mit $h(m) \geqq \varepsilon_m$ und eine stark multiplikative Funktion $f$ mit $f(p) = 1 + \delta(p)$, $\delta(p) \geqq 0$ und $\delta(p) \to 0$ für $p \to \infty$, so daß der Mittelwert $M(f)$ von $f$ existiert, aber*

$$\limsup_{x \to \infty} x^{-h(x)} \sum_{x < n \leqq x + x^{h(x)}} f(n) = \infty \tag{8}$$

*ist.*

Zum Beweis verwenden wir Siebresultate und Ideen, die in [3] benutzt wurden.

**Bemerkung 2.** Mit denselben Methoden lassen sich auch die Summen $\Sigma := \sum_{n \leqq x} f(a_n)$ behandeln, wenn $\mathscr{A} = \{a_n\}$ eine der Folgen ist, die in Indlekofer [5] betrachtet wurden. Obere Abschätzungen (und asymptotische Aussagen) für $\Sigma$ lassen sich wie in der vorliegenden Arbeit machen. Darüber hinaus kann man die dortigen Bedingungen abschwächen, wenn $f$ etwa die Voraussetzungen von Satz 1 oder Satz 2 erfüllt.

Wird von $\delta(p)$ nur noch gefordert, daß die Reihe $\sum_p \delta(p) p^{-1}$ konvergiert, so kann man für die Länge des Intervalls nicht einmal mehr $y = o(x)$ wählen (vgl. auch das erwähnte Beispiel von Babu). Wir zeigen

**Satz 4.** *Für jede Folge $\varepsilon_m \searrow 0$ existiert eine Funktion $h(x) \searrow 0$ $(x \to \infty)$ mit $h(m) \geqq \varepsilon_m$ und eine stark multiplikative Funktion $f$ mit $f(p) = 1 + \delta(p)$, $\delta(p) \geqq 0$, so daß der Mittelwert $M(f)$ von $f$ existiert, aber*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{1}{x h(x)} \sum_{x < n \leqq x(1 + h(x))} f(n) = \infty$$

*ist.*

## 2. Bezeichnungen und Lemmata

Die Folge $\mathscr{A} = \{a_n\}$ sei gegeben durch

$$\mathscr{A} = \{m : x < m \leqq x + y\}.$$

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ stark multiplikativ, d.h. $f(p^m) = f(p)$; außerdem sei $f(p) = 1 + \delta(p)$, wobei $\delta(p) > 0$ ist und monoton fällt. Ex existiere der Mittelwert

$$M(f) = \lim_{x \to \infty} x^{-1} \sum_{n \leqq x} f(n) :$$

Dies bedeutet

$$M(f) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{f(p)}{p - 1}\right)$$

und

$$S := \sum_p \frac{f(p)-1}{p} = \sum_p \frac{\delta(p)}{p} < \infty .$$

Hieraus folgt

(9) $$S \geqq \sum_{p \leqq x} \frac{\delta(p)}{p} \geqq \delta(x) \cdot \sum_{p \leqq x} p^{-1}$$

bzw.

(10) $$\delta(x) = O\left(\frac{1}{\log\log x}\right).$$

Wir wählen

(11) $$g(x) = \frac{\omega(x)}{\log\log x}, \quad \omega(x) \uparrow \infty \quad (x \to \infty)$$

und

(12) $$h(x) > 2\omega_1(x)\, g(x), \quad \omega_1(x) \uparrow \infty \quad (x \to \infty).$$

Dann zeigen wir

(13) $$\lim_{x \to \infty} x^{-h(x)} \sum_{x < n \leqq x + x^{h(x)}} f(n) = M(f).$$

**Bemerkung 3.** Wir setzen

(14) $$a_n = b_n d_n$$

mit

(15) $$p(b_n) \leqq x^{g(x)}, \quad q(d_n) > x^{g(x)}.$$

Hierbei bezeichnet $p(m)$ bzw. $q(m)$ den größten bzw. kleinsten Primteiler von $m$.

**Lemma 1.** *Es sei* $a > 0$ *und* $a \leqq p_1 < p_2 < \cdots < p_l < 2x$ ($p_i$ *prim*). *Weiter sei* $\prod_{i=1}^{l} p_i < 2x$. *Dann gilt mit geeignetem* $c > 0$

(16) $$\prod_{i=1}^{l} (1+\delta(p_i)) \begin{cases} \ll \exp\left(c\, \dfrac{\log x}{\log\log x} \cdot \dfrac{1}{\log\log\log x}\right) & \text{für alle} \quad a > 0, \\ \ll \exp\left(c\, \dfrac{\log x}{\log a} \cdot \dfrac{1}{\log\log a}\right) & \text{für alle} \quad a > 0, \\ = 1 + O\left(\dfrac{1}{\omega(x)}\right) & \text{für} \quad a = x^{g(x)}. \end{cases}$$

*Beweis.* Offenbar ist

$$\prod_{i=1}^{l} (1+\delta(p_i)) = \exp\left(\sum_{i=1}^{l} \log(1+\delta(p_i))\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{l} \delta(p_i) + O\left(\sum_{i=1}^{l} \delta^2(p_i)\right)\right).$$

Wir spalten die Summe $\sum_{i=1}^{l} \delta(p_i)$ auf und erhalten

$$\sum_{i=1}^{l} \delta(p_i) \ll \sum_{i \leqq l/\log\log l} 1 + \delta\left(\frac{l}{\log\log l}\right) \sum_{i \leqq l} 1$$
$$\ll \frac{l}{\log\log l}.$$

Wegen $p_1 p_2 \cdots p_l \leqq 2x$ bzw. wegen

$$l \log l \sim \sum_{p \leqq p_l} \log p < \log 2x$$

folgt die erste Ungleichung. Für die anderen Behauptungen beachte man

$$\sum_{i=1}^{l} \delta(p_i) \leqq \delta(p_1) \cdot l \ll \frac{l}{\log\log p_l} < \frac{l}{\log\log a}$$

und

$$a^l \leqq p_1 \cdots p_l < 2x,$$

so daß die restlichen Aussagen des Lemmas offensichtlich richtig sind.

**Lemma 2.** *Sei $f$ stark multiplikativ wie oben und $z = x^{\omega_1(x) g(x)}$. Dann gilt mit einer positiven Konstanten $c$*

$$\sum_{\substack{z < m \\ p(m) \leqq w}} \frac{f(m)}{m} \ll \exp\left(\sum_{p \leqq w} \frac{f(p)}{p} - cu \log u\right). \tag{17}$$

*Hierbei ist*

$$u = \log z / \log w \quad \textit{und} \quad \log x \leqq w \leqq x^{g(x)}.$$

*Beweis.* Mit einer Idee von Rankin [6] zeigt man für ein $\varepsilon \in (0, 1/3)$ (vgl. [4], S. 268f.)

$$\sum_{\substack{z < m \\ p(m) \leqq w}} \frac{f(m)}{m} < \sum_{\substack{z < m \\ p(m) \leqq w}} \left(\frac{m}{z}\right)^{\varepsilon} \frac{f(m)}{m}$$
$$\ll \exp\left(\sum_{p \leqq w} \frac{f(p)}{p} + c_1 w^{\varepsilon} - \varepsilon \log z\right).$$

Wählt man mit geeignetem $c$

$$\varepsilon = \frac{c}{\log w} \log \frac{\log z}{\log w},$$

so ist offenbar $0 < \varepsilon < 1/3$ und die Behauptung richtig.

**Lemma 3.** *Sei* $y = x^{h(x)}$, $z = x^{\omega_1(x) g(x)}$, $\mu \leqq z^{3/2}$ *und* $p \leqq x^{g(x)}$. *Dann gilt*

$$\sum_{\substack{n \leqq y \\ \mu | b_n \\ q\left(\frac{b_n}{\mu}\right) \geqq p}} 1 = \frac{y}{\mu} \prod_{q \leqq p} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left\{ 1 + O(\exp(-u(\log u - \log\log 3u - 2))) + O(\exp(-\sqrt{\log y/\mu})) \right\}, \tag{18}$$

*wobei* $u = \dfrac{\log y/\mu}{\log p}$ *ist.*

*Beweis.* Dieses „Fundamentallemma" folgt aus Theorem 2. 5 in [3]. Die dortigen Voraussetzungen sind erfüllt. Man beachte

$$p \leqq x^{g(x)} \leqq x^{\omega_1(x) g(x)/2} \leqq y/\mu.$$

## 3. Beweis von Satz 1

Mit Lemma 1 und (14) erhalten wir

$$\sum_{n \leqq y} f(a_n) = \sum_{n \leqq y} f(b_n) \{1 + o(1)\} = \Sigma_1 + o(\Sigma_1). \tag{19}$$

Wir zerlegen $\Sigma_1$ in

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{n \leqq y \\ b_n \leqq z}} f(b_n) + \sum_{\substack{n \leqq y \\ b_n > z}} f(b_n) = \Sigma_{11} + \Sigma_{12} \tag{20}$$

mit $z = x^{\omega_1(x) g(x)}$.

Wir summieren $\Sigma_{12}$ um nach Teilern $\mu$ von $b_n$, wobei $z < \mu \leqq z^{3/2}$ und $q(b_b/\mu) \geqq p(\mu)$ ist. Dann folgt

$$\Sigma_{12} \leqq \sum_{z \leqq \mu \leqq z^{3/2}} f(\mu) \sum_{\substack{n \leqq y \\ \mu | b_n,\, q\left(\frac{b_n}{\mu}\right) > p(\mu)}} f\left(\frac{b_n}{\mu}\right).$$

Setzen wir $\mu = p\mu_1$ mit $p = p(\mu)$, so erhalten wir

$$\Sigma_{12} \leqq \sum_{p \leqq x^{g(x)}} f(p) \sum_{\substack{\frac{z}{p} \leqq \mu_1 \leqq \frac{z^{3/2}}{p} \\ p(\mu_1) \leqq p}} f(\mu_1) \sum_{\substack{n \leqq y \\ \mu_1 p | b_n \\ q\left(\frac{b_n}{\mu_1 p}\right) \geqq p}} f\left(\frac{b_n}{\mu_1 p}\right),$$

und mit Lemma 1 und Lemma 3

$$\Sigma_{12} \ll y \sum_{p \leqq \log x} p^{-1} \prod_{q \leqq p} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \exp\left\{c \frac{\log x}{\log\log x} \cdot \frac{1}{\log\log\log x}\right\} \tag{21}$$

$$\cdot \sum_{\substack{\frac{z}{p} \leqq \mu_1 \leqq \frac{z^{3/2}}{p} \\ p(\mu_1) \leqq p}} \frac{1}{\mu}$$

$$+ y \sum_{\log x \leqq p \leqq x^{g(x)}} p^{-1} \prod_{q \leqq p} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \exp\left\{c \frac{\log x}{\log p} \cdot \frac{1}{\log\log p}\right\}$$

$$\cdot \sum_{\substack{\frac{z}{p} \leqq \mu_1 \leqq \frac{z^{3/2}}{p} \\ p(\mu_1) \leqq p}} \frac{f(\mu_1)}{\mu_1}$$

$$= y \Sigma_{12}^1 + y \Sigma_{12}^2.$$

Die erste Summe schätzen wir elementar ab durch

$$\Sigma_{12}^1 \leqq z^{-1} \frac{\log x}{(\log\log x)^2} \cdot \exp\left(c \frac{\log x}{\log\log x} \cdot \frac{1}{\log\log\log x}\right) \cdot \sum_{\substack{\mu \leqq 2x \\ p(\mu) \leqq \log x}} 1 \tag{22}$$

$$\ll \exp\left\{- \omega_1(x)\, g(x) \log x + \log\log x - 2 \log\log\log x\right.$$

$$\left. + c \frac{\log x}{\log\log x} \cdot \frac{1}{\log\log\log x} + c' \frac{\log x}{\log\log x}\right\}$$

$$\ll \exp\left\{\frac{\log x}{\log\log x} \left(c'' + c \frac{1}{\log\log\log x} - \omega_1(x)\, \omega(x)\right)\right\}$$

$$= o(1)$$

für $x \to \infty$.

Für die zweite Summe verwenden wir Lemma 2 und erhalten

$$\Sigma_{12}^2 \ll \sum_{\log x \leqq p \leqq x^{g(x)}} p^{-1} \exp\left(\sum_{q \leqq p} \frac{f(q) - 1}{q}\right)$$

$$\cdot \exp\left(c \frac{\log x}{\log p} \cdot \frac{1}{\log\log p} - c' \frac{\log z p^{-1}}{\log p} \log \frac{\log z p^{-1}}{\log p}\right)$$

$$\ll \exp\left(c \frac{\log x}{\log p \cdot \log\log p} \{1 - c'' \omega_1(x)\, g(x) \cdot \log\log p \cdot \{\log\log z - \log\log p\}\}\right).$$

Offenbar hat $\log\log p \cdot (\log\log z - \log\log p)$ im Intervall $[\log x, x^{g(x)}]$ (lokale) Minima an den Intervallenden $p = \log x$ bzw. $p = x^{g(x)}$. Dies führt zu der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\Sigma_{12}^2 &\ll \sum_{\log x \leqq p \leqq x^{g(x)}} p^{-1} \exp\left(\frac{\log x}{\log p \cdot \log\log p}\{1 - c''\omega_1(x)\,\omega(x) \cdot \log\omega_1(x)\}\right) \\
&\ll \sum_{\log x \leqq p \leqq x^{g(x)}} p^{-1} \exp\left\{-c\,\frac{\log x}{\log p} \cdot \frac{\omega(x)}{\log\log x} \cdot \omega_1(x) \log\omega_1(x)\right\} \\
&\ll \sum_{\log x \leqq p \leqq x^{g(x)}} p^{-1} \exp(-\log x^{g(x)}/\log p) \exp(-\omega_1(x)) \\
&= o(1)
\end{aligned}$$

für $x \to \infty$ wegen der Konvergenz von

$$\sum_{p \leqq t} p^{-1} \exp\left(-\frac{\log t}{\log p}\right) \quad (t \to \infty).$$

Wenden wir uns nun $\Sigma_{11}$ zu:

$$\Sigma_{11} = \sum_{\substack{b \leqq z \\ p(b) \leqq x^{g(x)}}} f(b) \sum_{\substack{n \leqq y \\ b \mid a_n,\, q\left(\frac{a_n}{b}\right) > x^{g(x)}}} 1. \tag{24}$$

Wegen $h(x) > \omega_1(x)\, g(x)$ folgt aus Lemma 3

$$\Sigma_{11} = y \prod_{p \leqq x^{g(x)}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{b \leqq z \\ p(b) \leqq x^{g(x)}}} \frac{f(b)}{b}\{1 + o(1)\}. \tag{25}$$

Für die innere Summe gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{b \leqq z \\ p(b) \leqq x^{g(x)}}} \frac{f(b)}{b} &= \Bigg( \sum_{\substack{b \\ p(b) \leqq x^{g(x)}}} - \sum_{\substack{z \leqq b \\ p(b) \leqq x^{g(x)}}} \Bigg) \frac{f(b)}{b} \\
&= \prod_{p \leqq x^{g(x)}} \left(1 + \frac{f(p)}{p-1}\right) + O\left(\exp\left\{\sum_{q \leqq x^{g(x)}} \frac{f(q)}{q} - c\,\omega_1(x) \log\omega_1(x)\right\}\right).
\end{aligned} \tag{26}$$

Zusammengefaßt ergibt dies wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_p \frac{f(p)-1}{p}$ die Behauptung.

## 4. Beweis von Satz 2

Der Beweis von Satz 2 wird analog zu obigem Beweis geführt. Man beachtet, daß sich in Lemma 1 die Voraussetzungen ändern, und zwar zu

$$p_l \ll x^g \quad (g := \operatorname{grad} F)$$

$$|F(n)| = \prod_{i=1}^{l} p_i \ll x^g,$$

während die Behauptung (16) unverändert bleibt. Bezüglich des Sieb-Lemmas (Lemma 3) betrachtet man die Folge ($\mu \in \mathbb{N}$)

$$\{a_n\} = \mathscr{A} = \{|F(m)|: x < m \leqq x + y, \ \mu | F(m)\}.$$

Offensichtlich ist

$$|\mathscr{A}| = \varrho(\mu)\left(\frac{y}{\mu} + \theta\right), \qquad |\theta| \leqq 1,$$

wobei $\varrho(\mu)$ die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$F(m) \equiv 0 \bmod \mu$$

ist. Damit finden wir

$$|\mathscr{A}_d| = |\{n: d | a_n\}| = y\,\frac{\varrho(\mu)}{\mu} \cdot \frac{\varrho(\mu, d)}{d} + R(d, \mu)$$

mit

$$|R(d, \mu)| \leqq \varrho(d\mu)$$

und

$$\varrho(\mu, d) = \frac{\varrho(\mu d)}{\varrho(\mu)}.$$

Offenbar ist $\varrho(\mu, d)$ multiplikativ in $d$, falls $d$ quadratfrei ist, und es gilt

$$\varrho(\mu, p) = \begin{cases} \varrho(p) & \text{falls} \quad p \nmid \mu, \\ \dfrac{\varrho(p^{l+1})}{\varrho(p^l)} & \text{falls} \quad p^l \| \mu. \end{cases}$$

Zerlegt man $a_n$ wie oben in $a_n = b_n d_n$ (s. (14)), so gilt mit Theorem 2. 5 aus [3]

**Lemma 3'.** *Sei* $y = x^{h(x)}$, $z = x^{\omega_1(x) g(x)}$, $\mu \leqq z^{3/2}$ *und* $p \leqq x^{g(x)}$. *Dann gilt*

$$\sum_{\substack{n \leqq y \\ \mu | b_n,\, q\left(\frac{b_n}{\mu}\right) \geqq p}} 1 = y\,\frac{\varrho(\mu)}{\mu} \prod_{q \leqq p}\left(1 - \frac{\varrho(\mu, q)}{q}\right)$$

$$\cdot \{1 + O(\exp(-u(\log u - \log\log 3u - 2))) + O(\varrho(\mu)\exp(-\sqrt{\log y/\mu}))\},$$

*wobei* $u = \dfrac{\log y/\mu}{\log p}$ *ist.*

Die übrigen notwendigen Modifikationen des Beweises aus § 3 sind offensichtlich, so daß die Behauptung des Satzes 2 folgt.

## 5. Beweis von Satz 3

Sei $\varepsilon>0$ gegeben. Wir definieren eine stark additive Funktion $g_x$ durch

$$g_x(p)=\begin{cases}1 & \text{für} \quad x^{2\varepsilon}<p<x,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Die Turán-Kubilius-Ungleichung liefert mit einer absoluten Konstanten $c>0$

$$x^{-1}\sum_{m\leqq x}\left(g_x(m)-\sum_{x^{2\varepsilon}<p<x}\frac{1}{p}\right)^2\leqq c\sum_{x^{2\varepsilon}<p<x}\frac{1}{p}.$$

Dann gilt wegen

$$\sum_{x^{2\varepsilon}<p<x}\frac{1}{p}=\left(1+o\left(\frac{1}{\varepsilon\log x}\right)\right)\log\frac{1}{2\varepsilon}$$

die Abschätzung

$$x^{-1}\left|\left\{m\leqq x\colon \left|g_x(m)-\log\frac{1}{2\varepsilon}\right|\geqq\left(\log\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{3/4}\right\}\right|\ll\frac{1}{\left(\log\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{1/2}}$$

für $x\geqq x_0(\varepsilon)$. Insbesondere ist

$$x^{-1}\left|\left\{m\leqq x\colon g_x(m)\leqq\frac{1}{2}\log\frac{1}{2\varepsilon}\right\}\right|\ll\frac{1}{\left(\log\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{1/2}}$$

für $x\geqq x_0(\varepsilon)$.

Sei $\varepsilon_n\downarrow 0$ gegeben. Dann existiert zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $x_n$ im Intervall

$$x/2<x_n<x \qquad (\text{für } x\geqq x_0(\varepsilon_n)),$$

so daß

$$\left|\left\{m\colon x_n<m<x_n+x_n^{\varepsilon_n},\ g_{x_n}(m)>\frac{1}{2}\log\frac{1}{2\varepsilon_n}\right\}\right|=x_n^{\varepsilon_n}(1+o(1)) \tag{27}$$

für $n\to\infty$ ist.

Offenbar besitzt jedes $m$ in (27) höchstens $1/\varepsilon_n$ Primfaktoren $>x_n^{2\varepsilon_n}$. O.B.d.A. sei

$$x_n<x_{n+1}$$

und

$$x_n^{\varepsilon_n}>n^2/\varepsilon_n. \tag{28}$$

Bezeichnen

$$x_n^{2\varepsilon_n} \leqq p_1^{(n)} < p_2^{(n)} < \cdots < p_{t_n}^{(n)} \tag{29}$$

die Primteiler der Zahlen $m$, die in (27) gezäh verden, so ist offenbar

$$t_n < \frac{x_n^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n}$$

und wegen (28)

$$\sum_{i=1}^{t_n} \frac{1}{p_i^{(n)}} < \frac{x_n^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n} \cdot x^{-2\varepsilon_n} < \frac{1}{n^2}. \tag{30}$$

Sei

$$\mathscr{P}^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{p_1^{(n)}, \ldots, p_{t_n}^{(n)}\},$$

wobei die $x_n$ so gewählt seien, daß die Mengen $\{p_1^{(n)}, \ldots, p_{t_n}^{(n)}\}$ paarweise disjunkt sind. Dann gilt

$$\sum_{p \in \mathscr{P}^*} \frac{1}{p} < \infty.$$

Definiert man eine stark multiplikative Funktion $f$ durch

$$f(p) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{p} & \text{für} \quad p \notin \mathscr{P}^*, \\ 1 + \dfrac{1}{\log\log \dfrac{1}{\varepsilon_n}} & \text{für} \quad p \in \{p_1^{(n)}, \ldots, p_{t_n}^{(n)}\}, \qquad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

so folgt unmittelbar

$$\sum_{p \text{ prim}} \frac{f(p) - 1}{p} < \infty$$

und $M(f) \neq 0$. Andererseits gilt für jede Funktion $h\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $h(x_n) = \varepsilon_n$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\sup_{x \geqq 1} x^{-h(x)} \sum_{x < m \leqq x + x^{h(x)}} f(m) \geqq \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n^{-\varepsilon_n} \sum_{x_n < m \leqq x_n + x_n^{\varepsilon_n}} f(m)$$

$$\gg \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{\log\log \frac{1}{\varepsilon_n}}\right)^{\frac{1}{2} \log \frac{1}{2\varepsilon_n}} = \infty.$$

## 6. Beweis von Satz 4

Sei $\varepsilon_n > 0$ gegeben. Für ein beliebiges $x_n$ bezeichne $I_n$ das Intervall

$$I_n = (\sqrt{\varepsilon_n} \cdot (1+\varepsilon_n) x_n, (1+\varepsilon_n) x_n].$$

Betrachten wir nun die Zahlen $m$ aus der Menge

$$\mathscr{A}_n := \{x_n < m \leqq (1+\varepsilon_n) x_n \text{: existiert } p \in I_n \text{ mit } p | m\}.$$

Offenbar ist jedes $m \in \mathscr{A}_n$ durch genau eine Primzahl $p \in I_n$ teilbar. Darüber hinaus gibt es keine voneinander verschiedene Zahlen $m_1, m_2 \in \mathscr{A}_n$, die durch dieselbe Primzahl $p \in I_n$ geteilt werden.

Bezeichnen wir mit $\pi(x, x+y)$ die Anzahl der Primzahlen im Intervall $(x, x+y)$, so folgt

$$\text{(31)} \qquad |\mathscr{A}_n| = \sum_{i=1}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}(1+\varepsilon_n)}} \pi\left(\frac{x_n}{i}, \frac{(1+\varepsilon_n) x_n}{i}\right)$$
$$\geqq c \frac{\varepsilon_n x_n}{\log x_n} \sum_{i=1}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}(1+\varepsilon_n)}} \frac{1}{i} \geqq c' \frac{\varepsilon_n x_n}{\log x_n} \log \frac{1}{\varepsilon_n},$$

falls $x_n$ genügend groß ist.

Sei $\mathscr{A}_n^* \subset \mathscr{A}_n$ mit $|\mathscr{A}_n^*| = \left[c' \frac{\varepsilon_n x_n}{\log x_n} \log \frac{1}{\varepsilon_n}\right]$ und $\mathscr{P}_n^*$ die Menge der Primzahlen aus $I_n$, die Teiler der $m \in \mathscr{A}_n^*$ sind, d.h. $|\mathscr{P}_n^*| = |\mathscr{A}_n^*|$. Wählen wir $f(p) = \varrho(n) \frac{\log x_n}{\log \frac{1}{\varepsilon_n}}$ für $p \in \mathscr{P}_n^*$, wobei $\varrho(n)$ noch geeignet bestimmt wird, dann gilt

$$\sum_{p \in \mathscr{P}_n^*} \frac{f(p)}{p} \ll \frac{\varepsilon_n x_n}{\log x_n} \log \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n} x_n} \varrho(n) \frac{\log x_n}{\log \frac{1}{\varepsilon_n}}$$
$$= \varrho(n) \sqrt{\varepsilon_n}.$$

Ist die Folge $n_k$ so gewählt, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \sqrt{\varepsilon_{n_k}} < \infty$$

gilt, setzen wir

$$\varrho(n) = \begin{cases} k & \text{für} \quad n = n_k, \\ 0 & \text{für} \quad n \neq n_k, \end{cases}$$

wobei o.B.d.A. die Mengen $\mathscr{P}_{n_k}^*$ paarweise verschieden sind. Definiert man nun die stark multiplikative Funktion $f$ durch

$$f(q)=\begin{cases} k\dfrac{\log x_{n_k}}{\log\dfrac{1}{\varepsilon_{n_k}}}, & \text{falls} \quad q\in\mathscr{P}_{n_k}^* \quad \text{ist,} \\ 1 & \text{sonst,}\end{cases}$$

so folgt

$$\frac{1}{\varepsilon_{n_k} x_{n_k}} \sum_{x_{n_k}<m\leqq(1+\varepsilon_{n_k})x_{n_k}} f(m) \gg k, \tag{32}$$

während

$$\sum_p \frac{f(p)-1}{p} \ll \sum_{k=1}^{\infty} k\sqrt{\varepsilon_{n_k}} < \infty$$

ist. Letzteres impliziert aber die Existenz von $M(f)$, so daß wegen (32) die Behauptung des Satzes 4 gilt.

**Bemerkung 4.** Satz 1 läßt sich leicht verbessern, wenn man zur Bestimmung von $\varrho(x)$ in (9) und (10) beachtet, daß

$$o(1)=\sum_{\log x\leqq p\leqq x} \varrho(p)p^{-1} \gg \varrho(x)\log\log x$$

ist.

**Bemerkung 5.** Mit einer anderen Methode haben Alladi, Erdös und Vaaler [1] obere Abschätzungen für $\Sigma=\sum_{n\leqq x} f(a_n)$ angegeben, wobei $\{a_n\}$ eine Folge wie in Bemerkung 2 ist.

## Literatur

[1] *K. Alladi, P. Erdös, J. D. Vaaler*, Multiplicative functions and small divisors, to appear in Proc. Oklahoma Conf. on Number Theory.
[2] *G. J. Babu*, On the distribution of arithmetic functions, Acta Arith. **29** (1976), 97—104.
[3] *H. Halberstam, H.-E. Richert*, Sieve Methods, London-New York-San Francisco 1974.
[4] *K.-H. Indlekofer*, A Mean-Value Theorem for Multiplicative Functions, Math. Z. **172** (1980), 255—271.
[5] *K.-H. Indlekofer*, On the distribution of values of additive functions, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai. **13** (1976), 111—128.
[6] *R. A. Rankin*, The difference between consecutive prime numbers, J. London Math. Soc. **13** (1938), 242—247.

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Reáltanoda u. 13–15, H-1053 Budapest

Fachbereich Mathematik-Informatik, Universität Gesamthochschule Paderborn, Warburgerstr. 100, Postfach 1621, D-4790 Paderborn

Eingegangen 22. Januar 1987