Théorie des nombres · Number Theory
J.-M. De Koninck & C. Levesque (éd.)

Grandes valeurs de fonctions liées aux diviseurs premiers consécutifs d'un entier

Paul Erdős et Jean-Louis Nicolas

Abstract

Let n be an integer and $n = q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$ with $q_1 < \cdots < q_k$ its standard factorization into primes. We set $\omega(n) = k$, $f(n) = \sum_{1 \le i \le k-1} q_i/q_{i+1}$, $F(n) = \omega(n) - 1 - f(n)$. Large values of functions f and F are studied. More precisely, we say that N is a f-champion number if $n < N \Rightarrow f(n) < f(N)$. Several properties of champion numbers for both functions f and F are given. We also show that the maximal order of magnitude of $F(n)$ is $\sqrt{\log n} - C' + o(1)$ where $C' = 1.70...$ is a constant. The proof uses classical theorems in optimization and known results about distribution of primes.

1. Introduction

Soit un nombre entier n et sa décomposition en facteurs premiers

$$n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k} \quad \text{avec } q_1 < q_2 < \ldots < q_k \ .$$

On définit les fonctions :

$$\omega(n) = k \ ,$$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k-1} q_i/q_{i+1},$$

$$F(n) = \sum_{i=1}^{k-1} (1 - q_i/q_{i+1}) = \omega(n) - 1 - f(n) \ .$$

Lorsque $k = 1$, on pose $f(n) = F(n) = 0$.

On peut voir assez facilement que la fonction f a une valeur moyenne On écrit :

$$\frac{1}{x} \sum_{n \le x} f(n) = \frac{1}{x} \sum_{n \le x} \sum q_i/q_{i+1} \ .$$

En permutant les deux sommes, et en utilisant une méthode de crible, on obtient :

$$\lim \frac{1}{x} \sum_{n \le x} f(n) = \sum_q \frac{1}{q^2} \Big(\sum_{p<q} \prod_{p<r<q} (1 - 1/r) \Big)$$

où p, q, r sont des nombres premiers.

Nous nous intéresserons aux grandes valeurs des fonctions f et F. Plus précisément nous dirons qu'un nombre n est un champion pour f , ou f-champion, si

$$m < n \ \Rightarrow \ f(m) < f(n) \ .$$

Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit p_i le $i^{\text{ème}}$ nombre premier, et $N_k = p_1 p_2 \ldots p_k$. Alors, pour k assez grand, N_k est un nombre f-champion.*

Nous montrerons ensuite que, pour une famille infinie de nombres premiers p , incluant les nombres premiers compris entre 2 et 13, les nombres N_k/p sont f-champions pour k assez grand.

Enfin, sous une conjecture très forte sur la différence $p_{i+1} - p_i$, la conjecture de Cramer : $p_{i+1} - p_i = \mathrm{O}(\log^2 p_i)$, nous montrerons que tous les nombres f-champions assez grands sont de la forme N_k ou N_k/p .

Lorsque k est fixé, le problème d'optimisation en nombres réels lié aux grandes valeurs de la fonction f , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} y_i/y_{i+1} \\ y_1 y_2 \ldots y_k = n \ , \quad y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_k \end{cases}$$

a évidemment pour solution $y_1 = y_2 = \cdots = y_k = n^{1/k}$. La condition supplémentaire que les y_i doivent être des nombres premiers distincts change complètement le problème.

Par contre, l'étude des grandes valeurs de la fonction F est très liée à la solution en nombres réels du problème d'optimisation

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} (1 - y_i/y_{i+1}) \\ y_1 y_2 \ldots y_k \le n \ , \quad 1 \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_k \ . \end{cases}$$

Nous donnerons la solution de ce problème, et nous en déduirons l'inégalité suivante :

soit $1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_k$ des nombres réels, on a :

$$\sum_{i=1}^{k-1}(1 - y_i/y_{i+1}) \leq \sqrt{\log(y_1 y_2 \ldots y_k)},$$

d'où il découle immédiatement que

$$F(n) \leq \sqrt{\log n} \quad \text{pour tout } n \geq 1 \ .$$

Nous démontrerons également :

Théorème 2. *Il existe une constante C' ($C' = 1.70...$) telle que, lorsque $n \to +\infty$ on ait :*
(i) $F(n) \leq \sqrt{\log n} - C' + \mathrm{o}(1)$
et telle que, pour une infinité de n , on ait :
(ii) $F(n) \geq \sqrt{\log n} - C' + \mathrm{o}(1)$.

Nous démontrerons ensuite quelques propriétés des nombres F-champions, en utilisant le fait que (ii) du théorème 2 est vérifiée pour la suite des nombres F-champions. La structure des nombres F-champions est très différente de celle des nombres f-champions.

Des fonctions similaires à f et F ont été introduites, dans l'espoir de mieux cerner la distribution des diviseurs ou des diviseurs premiers d'un nombre entier.

J.M. De Koninck et A. Ivić ont considéré dans [De K-I] les fonctions h et H . Soit $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ et $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{\tau(n)} = n$ les diviseurs de n , on a :

$$h(n) = \sum_{i=1}^{\omega(n)-1} \frac{1}{q_{i+1} - q_i} \quad \text{et} \quad H(n) = \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} \frac{1}{d_{i+1} - d_i} \ .$$

On peut également considérer les fonctions (*cf.* [Erd 2]):

$$\hat{h}(n) = \sum_{1 \leq i < j \leq \omega(n)} \frac{1}{q_j - q_i} \quad \text{et} \quad \widehat{H}(n) = \sum_{1 \leq i < j \leq \tau(n)} \frac{1}{d_j - d_i}$$

et les fonctions :

$$g(n) = \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} d_i/d_{i+1}, \quad G(n) = \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} (1 - d_i/d_{i+1}) \ .$$

L'étude de g et G est liée au résultat de Vose (*cf.* [Vose] et [Ten]). Contrairement à ce qui se passe pour f et F , la structure des nombres

g-champions et G-champions est assez voisine de la structure des nombres hautement composés de Ramanujan (c'est-à-dire les nombres τ-champions). Nous reviendrons dans un autre article sur ces différentes fonctions.

Nous utiliserons fréquemment les inégalités :

$$1 - 1/x \leq \log x \leq 1 - 1/x + (x-1)^2/2 \; ; \quad x \geq 1, \tag{1}$$

$$x \log 2 \leq \log(1+x) \leq x \; ; \quad 0 \leq x \leq 1 \; . \tag{2}$$

On peut en particulier obtenir facilement un résultat moins fort que le théorème 2 : soit $z = \exp(\sqrt{\log n})$. Le nombre de diviseurs premiers de n qui sont $\geq z$ est inférieur à $(\log n)/\log z = \sqrt{\log n}$. On a donc, si $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$, avec $q_1 < q_2 < \ldots < q_k$ et si r est défini par $q_r \leq z < q_{r+1}$:

$$F(n) = \sum_{i=1}^{r-1} (1 - q_i/q_{i+1}) + \sum_{i=r}^{k-1} (1 - q_i/q_{i+1}) \; .$$

La première somme, par (1) est $\leq \log(q_r/q_1) \leq \log z$. La deuxième somme est inférieure à $k - r \leq \sqrt{\log n}$, et l'on obtient ainsi $F(n) \leq 2\sqrt{\log n}$.

Remerciements. Nous avons plaisir à remercier ici C. Malivert et J. Blot de l'équipe de recherche en optimisation de l'Université de Limoges qui nous ont aidés dans la résolution des problèmes d'optimisation conduisant à la démonstration du théorème 2.

NOTATIONS. p_i désignera toujours le i$^{\text{ème}}$ nombre premier. p (sans indices), q, q_i désigneront des nombres premiers. On désignera par q^- et q^+ les nombres premiers immédiatement inférieur ou supérieur à $q \geq 3$. On aura ainsi $11^- = 7$ et $p_5^+ = p_6 = 13$.

La fonction $\lfloor x \rfloor$, le plancher de x , désigne le plus grand entier $n \in \mathbf{Z}, n \leq x$.

En plus des notations o et O de Landau, nous utiliserons les notations $\ll$ et $\asymp$:

$$f \ll g \text{ signifie } f = \mathrm{O}(g) \quad \text{et} \quad f \asymp g \text{ signifie } f \ll g \text{ et } f \gg g \; .$$

2. Quelques lemmes sur les nombres premiers

Lemme 1. *On a pour* $p_i \geq 2$, $p_i/p_{i+1} \geq 3/5$.

Démonstration. Soit $\theta(x) = \sum_{p \le x} \log p$. D'après les théorèmes 9 et 10 de [Ros-Sch 1], on a, pour $x \ge 101$,

$$0.84 \le \theta(x)/x \le 1.02 \ .$$

On en déduit que $\theta(1.25x) \ge 1.05x > \theta(x)$, et donc pour $p_i \ge 101$, que $p_{i+1} \le 1.25 p_i$. Il reste à calculer p_i/p_{i+1} pour $p_i < 101$.

Lemme 2. *Soit* $11/20 < \tau \le 1$, *on a :*

$$\pi(x + x^\tau) - \pi(x) \gg x^\tau / \log x \ ,$$

avec $\pi(x) = \sum_{p \le x} 1$.

Démonstration. Ce lemme est dû à Heath-Brown et Iwaniec (*cf.* [H-B-Iwa]). Il a été récemment amélioré par Mozzochi (*cf.* [Moz]) qui remplace $\frac{11}{20}$ par $\frac{11}{20} - \frac{1}{384}$.

Lemme 3. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a :*

$$\sum_{p_i \le x} (p_{i+1} - p_i)^2 \ll x^{23/18+\varepsilon} \ .$$

Démonstration. Ce lemme est démontré par Heath-Brown (*cf.* [H-B]).

Lemme 4. *La série* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{p_i} \right)^2$ *est convergente. Sa somme est voisine de 1.6531.*

Démonstration. Posons $S_k = \sum_{1 \le i \le k} (p_{i+1} - p_i)^2$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{p_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i - S_{i-1}}{p_i^2}$$

en convenant que $S_0 = 0$. Cette expression vaut encore :

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i \left(\frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_{i+1}^2} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i (p_{i+1} - p_i) \frac{p_{i+1} + p_i}{p_i^2 p_{i+1}^2} \ .$$

Le lemme 2 nous donne $p_{i+1} - p_i \le p_i^{11/20+\varepsilon}$, et le lemme 3 donne pour S_i la majoration :

$$S_i \le i^{23/18+\varepsilon} \ .$$

Notre série est donc comparable à la série

$$\sum_{i\geq 1} i^{23/18+11/20-3+\varepsilon}$$

qui est convergente.

Observons que le même raisonnement nous donne :

$$\sum_{i\geq k}\left(\frac{p_{i+1}-p_i}{p_i}\right)^2 \ll \sum_{i\geq k} i^{-211/180+\varepsilon} = O(k^{-1/6}) \tag{3}$$

Le calcul numérique de la somme des 300 000 premiers termes de notre série, effectué par J.P. Massias, donne 1.6531.

Malheureusement la majoration ci-dessus n'est pas effective, et on ne peut savoir la précision de ce calcul numérique.

On peut montrer facilement que si la suite a_n est croissante et vérifie

$$a' n\log n \leq a_n \leq a'' n \log n \quad \text{et} \quad a_{n+1}-a_n \leq \frac{\lambda_n}{\log n}$$

avec $0 < a' < a''$, on a :

$$\sum_{N\leq n<2N}\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)^2 \leq \frac{4\lambda a''}{a'^2(\log N)^2} ,$$

et en déduire une majoration du reste de la série $\sum_n \left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)^2$.

De la majoration obtenue par Rosser et Schoenfeld (*cf.* [Ros-Sch 2] Théorème 8)

$$|\theta(x)-x| \leq 8.7\; x/\log^2 x$$

où $\theta(x) = \sum_{p\leq x}\log p$, et de

$$p_n \leq n(\log n + \log\log n) ,$$

on peut déduire :

$$p_{n+1}-p_n \leq 17.4 n/\log n .$$

On peut, par ce moyen, majorer le reste de la série $\sum \left(\frac{p_{n+1}-p_n}{p_n}\right)^2$ mais cette majoration est très grossière.

Sous l'hypothèse de Riemann, L. Schoenfeld a obtenu (*cf.* [Sch]) :

$$|\theta(x)-x| \leq \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log^2 x \; ; \quad x \geq 599,$$

qui permet d'évaluer plus raisonnablement la précision du calcul de cette constante.

Lemme 5. *La série* $\sum_{i=1}^{\infty} \log \frac{p_{i+1}}{p_i} - \left(1 - \frac{p_i}{p_{i+1}}\right)$ *est convergente. Nous désignerons sa somme par* C *. Une valeur approchée probable de* C *est : 0.5134.*

Démonstration. D'après (1), cette série est majorée par

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{p_i}\right)^2 ,$$

qui converge d'après le lemme précédent. La valeur numérique indiquée est la somme des 300 000 premiers termes.

Lemme 6. *Pour* $1 \leq x \leq y$ *posons* $L(x, y) = \log \frac{y}{x} - (1 - \frac{x}{y})$ *. Soit* $(q_i)_{i\geq 1}$ *une suite strictement croissante de nombres premiers. On a lorsque* $z \to +\infty$ *:*

$$\sum_{\substack{i \\ q_i \leq z}} L(q_i, q_{i+1}) \geq C - \log q_1 + \log 2 + \mathrm{o}(1)$$

où C *est la constante du lemme précédent.*

Démonstration. Si q_i et q_{i+1} ne sont pas des nombres premiers consécutifs, et si l'on rajoute p entre q_i et q_{i+1} , on perd

$$-L(q_i, p) - L(p, q_{i+1}) + L(q_i, q_{i+1}) = (1 - q_i/p)(1 - p/q_{i+1}) > 0 .$$

On a donc

$$\sum_{\substack{i \\ q_i \leq z}} L(q_i, q_{i+1}) + \sum_{\substack{i \\ p_i < q_1}} L(p_i, p_{i+1}) \leq \sum_{\substack{i \\ p_i \leq z}} L(p_i, p_{i+1}) = C + \mathrm{o}(1)$$

et

$$\sum_{\substack{i \\ p_i < q_1}} L(p_i, p_{i+1}) \leq \sum_{\substack{i \\ p_i < q_1}} \log \frac{p_{i+1}}{p_i} = \log \frac{q_1}{2} .$$

Lemme 7. *On a :*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} p_i/p_{i+1} &= k - 1 - \log p_k + \log 2 + C + \mathrm{O}(k^{-1/6}) \\ &= k - \log k - \log\log k + C + \log 2 - 1 + \mathrm{O}\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right) \end{aligned}$$

où C *désigne la constante du lemme 5.*

Démonstration. On a, avec la notation du lemme 6 :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k-1} p_i/p_{i+1} &= k-1-\sum_{i=1}^{k-1}(1-p_i/p_{i+1})\\ &= k-1+\sum_{i=1}^{k-1} L(p_i,p_{i+1}) - \log\frac{p_{i+1}}{p_i}\\ &= k-1-\log p_k+\log 2+\sum_{i=1}^{\infty} L(p_i,p_{i+1}) - \sum_{i\geq k} L(p_i,p_{i+1}) .\end{aligned}$$

On conclut en observant que, par (1), on a

$$L(p_i,p_{i+1}) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{p_{i+1}-p_i}{p_i}\right)^2$$

et en appliquant (3).

On obtient la deuxième relation en utilisant :

$$p_k = k(\log k + \mathrm{O}(\log\log k)) .$$

Lemme 8. *Soit* $1 \leq i \leq j-2$. *On définit*

$$S(p_i,p_j) = \Big(\sum_{i\leq k\leq j-1} p_k/p_{k+1}\Big) - p_i/p_j .$$

On a alors :

$$S(p_i,p_j) \geq j-i-1-(p_j-p_i)^2/(2p_i^2) .$$

Démonstration. On a :

$$S(p_i,p_j) = j-i-1-\sum_{i\leq k\leq j-1}(1-p_k/p_{k+1})+1-p_i/p_j .$$

En utilisant (1),

$$S(p_i,p_j) \geq j-i-1-\Big(\sum_{i\leq k\leq j-1}\log\frac{p_{k+1}}{p_k}\Big)+1-p_i/p_j .$$

On conclut en observant que la somme vaut $\log(p_j/p_i)$ et en appliquant de nouveau (1).

Lemme 9. *Soit* $N_k = \prod_{1\leq i\leq k} p_i$. *Soit* $n < N_k$ *et soit* $\omega(n) = k-r$ *avec* $r \geq 1$. *Soit* t *le nombre de diviseurs premiers de* n *qui sont* $> p_k$. *Alors on a* $t \leq \sqrt{3rp_k\log p_k}$. *Soit* ξ , $0 < \xi < 1$. *Alors le nombre* s *de nombres premiers* $\leq p_k^{\xi}$ *qui ne divisent pas* n *vérifie :* $s \leq r/(1-\xi)$.

Démonstration. Un tel n peut s'écrire :

$$n = N_k \frac{Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_t^{\alpha_t}}{q_1 q_2 \cdots q_{t+r}} q_1'^{\beta_1} \cdots q_u'^{\beta_u}$$

avec $p_k < Q_1 < \ldots < Q_t$, $\alpha_i \geq 1$, $q_1 < q_2 < \ldots < q_{t+r} \leq p_k$, $q'_1 < q'_2 < \ldots < q'_u \leq p_k$, $\beta_i \geq 1$ et $q'_i \neq q_j$ pour $1 \leq i \leq u$ et $1 \leq j \leq t+r$.

On a $t + r \leq k$ et :

$$1 > \frac{n}{N_k} \geq \frac{Q_1 \ldots Q_t}{p_k^{t+r}} \geq p_k^{-r} \prod_{j=1}^{t} (1 + j/p_k)$$

en utilisant $Q_j - p_k \geq j$. Il vient ensuite en remarquant que $j \leq t \leq k \leq p_k$ et en utilisant (2) :

$$\begin{aligned} r \log p_k &\geq \sum_{1 \leq j \leq t} \log(1 + j/p_k) \geq \log 2 \sum_{1 \leq j \leq t} j/p_k \\ &\geq \frac{t(t+1)}{2} \frac{\log 2}{p_k} \geq \frac{t^2}{3p_k} \ . \end{aligned}$$

On a de même :

$$1 > \frac{n}{N_k} \geq \frac{Q_1 \ldots Q_t}{p_k^{\xi_s} p_k^{t+r-s}} \geq p_k^{-r+s(1-\xi)} \ .$$

Ce qui montre que $s \leq r/(1 - \xi)$.

3. Étude des nombres f-champions

Lemme 10. *Soit $q \geq 3$. On suppose que q ne divise pas m , mais que q^- divise m . Alors :*

$$f(mq) \geq f(m) + q^-/q \geq f(m) + 3/5 \ .$$

Démonstration. Si tous les facteurs premiers de m sont $\leq q$, on a l'égalité $f(mq) = f(m) + q^-/q$. Sinon soit q' le plus petit diviseur premier de m qui suit q . On a :

$$f(mq) = f(m) + q^-/q + q/q' - q^-/q' \geq f(m) + q^-/q \ .$$

Le lemme 1 nous donne $q^-/q \geq 3/5$.

Lemme 11. *Soit n un nombre f-champion, et $P = P(n)$ son plus grand facteur premier. On a : P^- divise n . Soit q_1 et q_2 les deux plus petits nombres premiers ne divisant pas n . Alors si $P(n) \geq 31$, on a $q_1 q_2 > P(n)$.*

Démonstration. Si P^- ne divisait pas n , on aurait $f(nP^-/P) > f(n)$ et n ne serait pas f-champion.

Supposons d'abord $q_1 = 2$, $q_2 = 3$. Si 5 ne divise pas n , on pose $n' = 30n/P < n$ et

$$f(n') \geq 2/3 + 3/5 - 1 + f(n) > f(n) .$$

Si 5 divise n , on pose $n' = 6n/P < n$ et on a encore $f(n') > f(n)$, ce qui contredit le fait que n est f-champion.

Supposons ensuite $q_1 = 2$, $q_2 > 3$. Le lemme 10, appliqué à $m = 2n/P$ et $q = q_2$ donne, avec $n' = 2q_2n/P$:

$$f(n') - f(n) \geq 2/3 + 3/5 - 1 > 0$$

ce qui implique $n' > n$.

Si $q_1 > 2$, on applique deux fois le lemme 10 avec $m = n$, $q = q_1$, puis $m = nq_1$, $q = q_2$. On obtient ainsi avec $n' = nq_1q_2/P$,

$$f(n') - f(n) \geq \frac{6}{5} - 1 > 0 .$$

Ce qui entraîne $n' > n$ et donc $q_1q_2 > P$.

Démonstration du théorème 1. Soit k assez grand, et n un nombre f-champion vérifiant $N_{k-1} < n < N_k$. Cela implique $\omega(n) = k - r$ avec $1 \leq r \leq (\log k)(1 + \mathrm{O}(1))$ d'après le lemme 7. Le nombre n est sans facteur carré, et s'écrit avec les notations du lemme 9 :

$$n = N_k \frac{Q_1 \ldots Q_t}{q_1 \ldots q_{t+r}} .$$

Lorsque $t = 0$, le lemme 10 montre que $f(n) < f(N_k)$. On peut donc supposer $t \geq 1$. On définit deux suites $(i_s)_{1 \leq s \leq S}$ et $(j_s)_{1 \leq s \leq S}$ vérifiant $i_s + 2 \leq j_s$ et $j_s \leq i_{s+1}$, de telle façon que :

$$\bigcup_{1 \leq s \leq S} \{p \ ; \ p_{i_s} < p < p_{j_s}\} = \{q_i \ ; \ 1 \leq i \leq t + r \ , \ q_i > p_k^{1/3}\} .$$

Notons que l'ensemble ci-dessus est l'ensemble $\{q_1, \ldots, q_{t+r}\}$ sauf au plus q_1 , dans le cas où $q_1 < p_k^{1/3}$, ceci par le lemme 11.

Lorsque $q_1 < p_k^{1/3}$, on pose $\theta = 1$; lorsque $q_1 > p_k^{1/3}$, on pose $\theta = 0$, et l'on a :

$$(4) \qquad \sum_{1 \leq s \leq S} (j_s - i_s - 1) = t + r - \theta .$$

Avec la notation S du lemme 8, on pose $\sigma_1 = 2/3$ si $q_1 = 2$, $\sigma_1 = S(q_1^-, q_1^+)$ si $q_1 \geq 3$, et l'on a :

• si $q_{t+r} \neq p_k$:

$$f(n) = f(N_k) - \theta\sigma_1 - \sum_{s=1}^{S} S(p_{i_s}, p_{j_s}) + \frac{p_k}{Q_1} + \sum_{i=2}^{t} \frac{Q_{i-1}}{Q_i}$$

• si $q_{t+r} = p_k$, on a

$$p_{j_s} = p_{k+1}$$

et : $$f(n) = f(N_k) - \theta\sigma_1 - \sum_{s=1}^{S} S(p_{i_s}, p_{j_s}) + \frac{p_k}{p_{k+1}} - \frac{p_{i_s}}{p_{k+1}} + \frac{p_{i_s}}{Q_1} + \sum_{i=2}^{t} \frac{Q_{i-1}}{Q_i} .$$

Les deux formules coïncident lorsque $Q_1 = p_{k+1}$, et dans tous les cas on a :

$$f(n) \leq f(N_k) - \theta\sigma_1 - \sum_{s=1}^{S} S(p_{i_s}, p_{j_s}) + t . \tag{5}$$

On désigne par S' le plus grand s tel que $p_{i_s} \leq p_k^{9/10}$. Pour $s \geq S'+1$, on a par (4) et le lemme 9 :

$$j_s - i_s \leq t + r + 1 \leq p_k^{1/2+o(1)} \leq P_{i_s}^{5/9+o(1)}$$

et donc, par le lemme 2,

$$p_{j_s} - p_{i_s} \leq p_{i_s}^{5/9+o(1)} .$$

On a donc, avec le lemme 8 :

$$\sum_{s=S'+1}^{S} S(P_{i_s}, P_{j_s}) \geq \sum_{s=S'+1}^{S} (j_s - i_s + 1) - \sum_{s=S'+1}^{S} \frac{(p_{j_s} - p_{i_s})^2}{2p_{i_s}^2} .$$

Or, dans la dernière somme il y a au plus S termes, $S \leq t + r \leq p_k^{1/2+o(1)}$, et chacun de ces termes est majoré par

$$\frac{1}{2} p_{i_s}^{-8/9+o(1)} \leq \frac{1}{2} p_k^{-8/10+o(1)} .$$

On a donc

$$\sum_{s=S'+1}^{S} S(p_{i_s}, p_{j_s}) \geq \sum_{s=S'+1}^{S} (j_s - i_s + 1) + o(1) .$$

Le lemme 9 avec $\xi = 9/10$ montre que $S' = \mathrm{o}(1)$ et que, pour $s \leq S'$, $j_s - i_s = \mathrm{O}(1)$. Le lemme 2 nous indique alors que $p_{j_s} - p_{i_s} = p_{i_s}^{11/20+\mathrm{o}(1)}$ et comme $p_{i_s} \geq p_k^{1/3+\mathrm{o}(1)}$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{S'} S(p_{i_s}, p_{j_s}) &\geq \sum_{s=1}^{S'} j_s - i_s + 1 - \sum_{s=1}^{S'} \frac{(p_{j_s} - p_{i_s})^2}{2p_{i_s}^2} \\ &\geq \sum_{s=1}^{S'} j_s - i_s + 1 + \mathrm{o}(1) .\end{aligned}$$

On a donc, avec (4) :

$$\sum_{s=1}^{S} S(p_{i_s}, p_{j_s}) \geq t + r - \theta + \mathrm{o}(1) .$$

Observons maintenant que $\sigma_1 \geq 2/3$. En effet, si $q \neq 2$,

$$\sigma_1 = 1 - (1 - q_1^-/q_1)(1 - q_1/q_1^+) \geq 1 - (2/5)^2$$

par le lemme 1. La formule (5) donne alors :

$$(6) \qquad f(n) \leq f(N_k) + \theta(1 - \sigma_1) - r + \mathrm{o}(1) \leq f(N_k) - r + 1/3 + \mathrm{o}(1) .$$

Et comme $r \geq 1$, on a $f(n) < f(N_k)$, et donc N_k est f-champion.

On voit également que si $r \geq 2$, on a $f(n) < f(N_{k-1})$ et n n'est pas f-champion. Les nombres f-champions compris entre N_{k-1} et N_k ont donc $k - 1$ facteurs premiers.

Définition. Pour $p = 2$, on pose $\psi(2) = 1/3$, et pour $p \geq 3$:

$$(7) \qquad \psi(p) = 1 - S(p^-, p^+) = \left(\frac{p - p^-}{p}\right)\left(\frac{p^+ - p}{p^+}\right) .$$

On dit qu'un nombre premier p est "bon" si pour $q > p$, on a $\psi(q) < \psi(p)$. Les "bons" nombres premiers $\leq 1\,000$ sont :
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 23, 37, 53, 89, 113, 127, 211, 293, 331, 337, 409, 479, 541, 631, 787, 839$.

Il n'est pas difficile de démontrer que l'ensemble des bons nombres premiers est de densité 0 dans l'ensemble des nombres premiers, en utilisant le résultat de P. Erdös (*cf.* [Erd 1]) amélioré par H. Maier (*cf.* [Maier]).

On observe que, si $p < p_k$, on a :

$$f(N_k/p) = f(N_k) - 1 + \psi(p) .$$

Il est clair que, si p n'est pas bon, N_k/p n'est pas f-champion pour k suffisamment grand.

Proposition 1. *Soit p un "bon" nombre premier. Pour k assez grand N_k/p est f-champion.*

La démonstration est très voisine de celle du théorème 1 : on considère un nombre n qui est f-champion et qui vérifie $N_{k-1} < n < N_k/p$.

D'après la démonstration du théorème 1, un tel nombre s'écrit :

$$n = N_k \frac{Q_1 \dots Q_t}{q_1 \dots q_{t+1}} \ .$$

Si $t = 0$, et $q_1 > p$, on a bien $f(n) < f(N_k/p)$ puisque p est "bon". Si $t \geq 1$, on a $n > N_k/q_1$, et donc $q_1 > p$. La formule (6) est encore valable avec $\sigma_1 = 1 - \psi(q_1)$ et $r = 1$, et l'on obtient :

$$f(n) \leq f(N_k) - 1 + \psi(q_1) + \mathrm{o}(1) \ .$$

Or, $\lim_{p \to +\infty} \psi(p) = 0$. Par conséquent $\psi(p) - \max_{q>p} \psi(q) = \varepsilon_p > 0$, et l'on a :

$$f(n) \leq f(N_k/p) - \varepsilon_p + \mathrm{o}(1) \ ,$$

ce qui assure que pour k assez grand, N_k/p est f-champion.

Proposition 2. *Supposons vérifiée la conjecture de Cramer (cf. [Cra] et [Rie] p.85), $p_{k+1} - p_k \ll \log^2 p_k$. Alors les nombres f-champions assez grands sont de la forme N_k ou N_k/p , avec $p \leq p_k^{1/2+\mathrm{o}(1)}$.*

Démonstration. Soit n un nombre f-champion vérifiant $N_{k-1} < n < N_k$. Nous avons vu que $\omega(n) = k - 1$. On définit $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ les grands diviseurs premiers consécutifs de n : on a $Q_i^+ = Q_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq t-1$, Q_t est le plus grand facteur premier de n , Q_1^- ne divise pas n . D'après le lemme 11, on a $t \geq 2$. On désigne par $q_1, q_2, \dots, q_s$ les grands nombres premiers consécutifs $< Q_1$ et ne divisant pas n . On a : $q_s^+ = Q_1$ et q_1^- divise n . Comme n n'est pas de la forme N_k , $s \geq 1$.

Distinguons deux cas :

1er cas: $s \leq t-1$. On considère $n' = \dfrac{q_1 q_2 \dots q_s}{Q_{t-s+1} \dots Q_t} n$. On a $n' < n$, donc $f(n') < f(n)$, et avec les notations du lemme 8,

$$0 < f(n) - f'(n) = -S(q_1^-, Q_1) + \frac{Q_{t-s}}{Q_{t-s+1}} + \dots + \frac{Q_{t-1}}{Q_t} \ .$$

Le lemme 8 donne :

$$0 \leq -s + \frac{(Q_1 - q_1^-)^2}{2(q_1^-)^2} + s - \frac{2}{Q_{t-s+1}} - \dots - \frac{2}{Q_t} \leq \frac{(Q_1 - q_1^-)^2}{2(q_1^-)^2} - \frac{2s}{Q_t} \ .$$

La conjecture de Cramer nous donne :

$$Q_1 - q_1^- \ll (s+1)\log^2 Q_1 \le (s+1)\log^2 Q_t$$

et l'on en déduit :

$$(8) \qquad (q_1^-)^2 \ll \frac{(s+1)^2}{4s} Q_t \log^4 Q_t \ .$$

Supposons $s \ge 2$, et soit j tel que $2 \le j \le s$. On a :

$$(9) \qquad \frac{q_1 q_2 \dots q_j}{Q_{t-j+2} \dots Q_t} > 1 \ .$$

En effet, si ce n'était pas vrai, on pose $n'' = \dfrac{q_1 \dots q_j}{Q_{t-j+2} \dots Q_t} n$; on aurait $n'' \le n < N_k$ et $\omega(n'') = \omega(n) + 1 = k$, ce qui est impossible.

Appliquons le lemme 9 avec $k_0 = \pi(Q_1)$,

$$n_0 = \frac{Q_{t-s+2} \dots Q_t}{q_1 \dots q_s} N_{k_0} \ .$$

On a, d'après (9), $n_0 < N_{k_0}$, $\omega(n_0) = k_0 - 1$, et l'on en déduit :

$$(10) \qquad s \le t - 1 \le \sqrt{3Q_1 \log Q_1} \le \sqrt{3Q_t \log Q_t} \ .$$

Lorsque $s \ge 5$, (10) et (8) donnent :

$$q_1^- \ll Q_t^{3/4} (\log Q_t)^{9/4}$$

et (9) donne avec $j = 5$ en utilisant le lemme 1 :

$$q_1^- \gg Q_t^{4/5}$$

d'où une impossibilité pour Q_t assez grand.

Lorsque $3 \le s \le 4$, (8) donne $q_1^- \ll Q_t^{1/2} \log^2 Q_t$ et (9) donne avec $j = 3$, $q_1^- \gg Q_t^{2/3}$, d'où impossibilité pour Q_t assez grand.

Lorsque $s = 2$, (8) donne

$$q_1 \ll Q_t^{1/2} \log^2 Q_t \ .$$

Le lemme 11 nous assure que tous les nombres premiers p vérifiant $p \le cQ_t^{1/2} \log^{-2} Q_t$ divisent n . Choisissons $p \sim \log^5 Q_t$, et considérons

$$n_1 = \frac{q_1 q_2}{p Q_t} n < n \ .$$

On a :

$$\begin{aligned} f(n_1) - f(n) &= -1 + \psi(p) + S(q_1^-, q_2^+) - Q_{t-1}/Q_t \\ &\geq \psi(p) - (q_2^+ - q_1^-)^2/2(q_1^-)^2 . \end{aligned}$$

Le lemme 11 nous dit que $q_1 q_2 \geq Q_t$, soit $q_1 \gg Q_t^{1/2}$ et par la conjecture de Cramer,

$$\frac{(q_2^+ - q_1^-)^2}{2(q_1^-)^2} \ll \frac{\log^4 Q_t}{Q_t}$$

et par ailleurs, $\psi(p) \geq 4/pp^+ \gg \log^{-10} Q_t$, donc $f(n_1) > f(n)$ ce qui contredit le fait que n est f-champion, et le cas $s = 2$ est impossible.

La seule possibilité est donc $s = 1$, et dans ce cas, (8) nous donne :

$$q_1 \leq Q_t^{1/2+o(1)}$$

On raisonne alors comme lorsque $s = 2$ pour montrer que tous les nombres premiers $q < q_1$ divisent n . Notre nombre n est donc ainsi de la forme N_k/q_1 , avec $q_1 \leq p_k^{1/2+o(1)}$.

2e cas: $s \geq t$. Ce cas se traite de façon similaire : on considère $n' = \dfrac{q_1 q_2 \cdots q_t}{Q_1 Q_2 \ldots Q_t} n$, et au lieu de (8), on obtient

$$(q_1^-)^2 \ll \frac{t^2}{(t-1)} Q_t \log^4 Q_t . \tag{11}$$

(9) est toujours valide pour $2 \leq j \leq t$, ainsi que la majoration de $t - 1$ donnée par (10). Lorsque $t \geq 5$, on conclut comme pour $s \geq 5$ dans le premier cas. Lorsque $2 \leq t \leq 4$, (11) montre que $q_1, \ldots, q_t$ sont très petits devant $Q_1, \ldots, Q_t$, et que l'on a $f(n') > f(n)$ ce qui est impossible.

Remarque. Les calculs effectués sur les nombres premiers montrent que jusqu'à $4 \cdot 10^{12}$ la conjecture de Cramer est "vérifiée" (*cf.* [Rie], p.85). Il est possible d'adapter la démonstration de la proposition 2 pour calculer une table assez longue des nombres f-champions. La seule table que nous avons construite va jusqu'à 450 000, et donne les nombres f-champions :

$$N_2, N_3, N_4/2, N_4, N_5, N_6/2, N_6, N_7/2 .$$

Si la conjecture de Cramer est vraie, la proposition précédente nous dit qu'il n'y a pas de nombres f-champions entre $N_{k+1}/2$ et N_{k+1} . Supposons que $q < q' < q''$ sont trois nombres premiers consécutifs inférieurs à p_k et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $q' - q > p_k^{1/2+\delta}$ et $q'' - q > p_k^{1/2+\delta}$. On aura $f\Big(\dfrac{p_{k+2}}{2q'} N_{k+1}\Big) > f(N_{k+1}/2)$, et il y aura un nombre f-champion entre $N_{k+1}/2$ et N_{k+1} , si p_{k+2} est voisin de p_{k+1} .

4. Grandes valeurs de la fonction F

Lemme 12. *On définit, pour $k \geq 2$,*

$$A_k = \prod_{1 \leq j \leq k-1} ((k-1)/j)^j .$$

On a ainsi : $A_2 = 1$, $A_3 = 2$, $A_4 = 27/4$, $A_5 = 4^5 3^{-3} = 37.9\ldots$, *etc.*

(i) Il existe un nombre réel $\alpha = 0.249\ldots$, *tel que, pour* $k \geq 2$, *on ait:*

$$\log A_k = \frac{(k-1)^2}{4} - \frac{1}{12}\log(k-1) - \alpha - \frac{\theta}{720(k-1)^2} \quad \text{avec } 0 < \theta < 1 .$$

(ii) On a, pour $k \geq 2$:

$$\frac{(k-2)^2}{4} \leq \log A_k \leq \frac{(k-1)^2}{4} .$$

(iii) On a, pour $k \geq 2$:

$$(A_{k+1}/A_k)^{-2/(k(k-1))} = 1 - 1/k .$$

Démonstration. On applique d'abord la formule sommatoire d'Euler - Mac Laurin à la fonction $x \log x$. (*cf.* [Han], p.287) :

$$\sum_{j=1}^{k} j \log j = \frac{6k^2+6k+1}{12}\log k - \frac{k^2}{4} + \alpha - \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^{-2m}}{m(m+1)(2m+1)} B_{2m+2}$$

où α est le logarithme de la constante de Glaisher,

$$\alpha = 0.2487544770...$$

Comme les dérivées successives de $x \log x$ sont de signe constant et alterné, le reste est de même signe et plus petit en valeur absolue que le premier terme négligé. On obtient :

$$\sum_{j=1}^{k} j \log j = \frac{6k^2+6k+1}{12}\log k - \frac{k^2}{4} + \alpha - \frac{\theta}{720k^2} \quad \text{avec } 0 < \theta < 1 .$$

On achève la preuve de (i), en observant que :

$$\log A_k = \frac{k(k-1)}{2}\log(k-1) - \sum_{j=1}^{k-1} j \log j .$$

La démonstration de (ii) découle de (i), et (iii) se montre par un calcul direct.

Lemme 13. *Soit $k \geq 2$, A_k comme dans le lemme 12, A un nombre réel $\geq A_k$. On pose :*

$$M(A,k) = k - 1 - \frac{k}{2}(A/A_k)^{-2/(k(k-1))} .$$

(i) On a : $M(A,k) \leq \sqrt{\log A}$.

(ii) Lorsque $A \to +\infty$,

$$M(A,k) \leq \sqrt{\log A} - 1/2 + \mathrm{O}((\log\log A)/\sqrt{\log A}) .$$

(iii) Si $A_k \leq A \leq A_{k+1}$, on a :

$$\sqrt{\log A} - 1/2 \leq M(A,k).$$

(iv) Si l'on définit ρ par :

$$(A/A_k)^{-2/(k(k-1))} = 1 - \rho/k ,$$

on a $0 \leq \rho < k$, et :

$$(1/2 + M(A,k))^2 \leq \log A + \frac{1}{12}\log(k-1) + \frac{1}{4} + \frac{\rho^2}{4k} - \frac{k-1}{6k^2}\rho^3 .$$

Démonstration. Avec la définition de ρ donnée dans (iv), on a :

$$M(A,k) + 1/2 = (k - 1 + \rho)/2 ,$$

et :

$$\log A = \log A_k - ((k(k-1))/2)\log(1 - \rho/k) .$$

On minore $\log A_k$ par (i) du lemme précédent ; il vient :

$$(1/2 + M(A,k))^2 - \log A \leq \frac{1}{12}\log(k-1) + \alpha + \frac{k(k-1)}{2}\log(1-\rho/k) + \frac{\rho(k-1)}{2} + \frac{\rho^2}{4} .$$

On majore α par $1/4$, et $\log(1-x)$ par $-x - x^2/2 - x^3/3$, et cela donne (iv).

Lorsque $k = 2$, $M(A,2) = 1 - 1/A$, et (i) et (ii) se vérifient aisément. On peut donc supposer $k \geq 3$. Dans l'intervalle $[0,k]$, la fonction ρ : $\frac{k-1}{6k^2}\rho^3 - \frac{\rho^2}{4k}$ a un minimum atteint en $\rho_0 = \frac{k}{k-1}$, qui vaut $-\frac{1}{12}\frac{k}{(k-1)^2} \geq -\frac{1}{16}$ pour $k \geq 3$; (iv) donne alors :

$$(1/2 + M(A,k))^2 \leq \log A + (1/12)\log(k-1) + 5/16 . \tag{12}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}(\sqrt{\log A}+1/2)^2 &= \log A+\sqrt{\log A}+1/4\\ &\geq \log A+\sqrt{\log A_k}+1/4 \geq \log A+\frac{k-2}{2}+\frac{1}{4}\\ &\geq \log A+(1/12)\log(k-1)+5/16\end{aligned}$$

pour $k \geq 3$. Cela démontre (i).

Le lemme 12, (ii) donne

$$k-1=\mathrm{O}(\sqrt{\log A_k})$$

et l'inégalité (12) donne :

$$(1/2+M(A,k))^2 \leq \log A+\mathrm{O}(\log\log A),$$

d'où l'on déduit (ii). On peut, en fait, obtenir un développement asymptotique plus précis.

Enfin, lorsque k est fixé, (iv) définit ρ comme une fonction $\rho(A)$. Lorsque A croît de A_k à $+\infty$, $\rho(A)$ croît de 0 à k . Le lemme 12 (iii) nous dit que, pour $A_k \leq A \leq A_{k+1}$, on a $0 \leq \rho \leq 1$. On procède alors comue ci-dessus :

$$\log A-(1/2+M(A,k))^2=\log A_k-\frac{k(k-1)}{2}\log(1-\rho/k)-\left(\frac{k-1+\rho}{2}\right)^2 .$$

On majore $\log A_k$ par $(k-1)^2/4$, on utilise :

$$\begin{aligned}-\log(1-\rho/k) &\leq \rho/k+\frac{\rho^2}{2k^2}\left(1+\frac{\rho}{k}+\frac{\rho^2}{k^2}+\cdots\right)\\ &\leq \rho/k+\rho^2/(2k(k-\rho)) \leq \rho/k+\rho^2/(2k(k-1))\end{aligned}$$

(puisque $\rho<1$), et l'on obtient (iii).

Problème d'optimisation N° 1. *Soit $k \geq 2$, et A réel, $A>0$. La solution du problème*

$$\mathcal{P}(A,k)\begin{cases} \min \sum_{1\leq j\leq k-1} \exp(x_j/j) \\ \sum_{1\leq j\leq k-1} x_j+\log A=0\ ,\ \ x_j\in\mathbf{R}\ .\end{cases}$$

est donnée par

$$\lambda=\frac{1}{k-1}\Big(\frac{A}{A_k}\Big)^{-2/(k(k-1))},$$

$$x_j^* = j\log(j\lambda)\ , \quad 1 \le j \le k-1\ ,$$

et la valeur du minimum est :

$$\mathcal{M}(A,k) = \frac{k(k-1)}{2}\lambda = \frac{k}{2}\Big(\frac{A}{A_k}\Big)^{-2/(k(k-1))}$$

où A_k est défini dans le lemme 12.

Démonstration. La contrainte et la fonction à minimiser sont convexes, il y a donc un minimum que l'on peut obtenir par la méthode des multiplicateurs de Lagrange : on doit avoir

$$e^{x_1^*} = \cdots = \frac{1}{j}e^{x_j^*/j} = \cdots = \lambda\ .$$

On en déduit la valeur des x_j^* en fonction de λ , et en reportant dans la contrainte, la valeur de λ .

Lemme 14. *Soit $A > 0$ et A_k et $M(A,k)$ définis comme dans le lemme 13. On a, pour tout $k \ge 2$:*

$$\frac{k+1}{2}(A/A_{k+1})^{-2/(k(k+1))} \le 1 + \frac{k}{2}(A/A_k)^{-2/(k(k-1))}\ .$$

Cette inégalité est stricte, sauf lorsque $A = A_{k+1}$. Pour A fixé, la suite $M(A,k)$ est croissante.

Démonstration. Si l'on complète la solution optimale du problème $\mathcal{P}(A,k)$ en faisant $x_k = 0$, on obtient une solution possible du problème $\mathcal{P}(A,k+1)$, ce qui démontre l'inégalité. En calculant x_k^* dans $\mathcal{P}(A,k+1)$, on voit que l'inégalité est stricte sauf si $A = A_{k+1}$. Lorsque $A = A_{k+1}$, la relation (iii) du lemme 12 montre qu'il y a égalité.

Problème d'optimisation N° 2. *Soit $k \ge 2$, $A \ge 1$,*

$$\mathcal{P}^-(A,k)\begin{cases} \min f_1(x) = \sum\limits_{1\le j\le k-1} \exp(x_j/j) \\ g_1(x) = \sum\limits_{1\le j\le k-1} x_j = -\log A \\ x_j \le 0\ ;\quad 1 \le j \le k-1\ . \end{cases}$$

On définit $r \ge 2$ par $A_r \le A < A_{r+1}$.

Si $r \ge k$, la solution du problème 2 est celle du problème 1. La valeur du minimum est

$$\mathcal{M}^-(A,k) = \mathcal{M}(A,k) = \Big(\frac{k}{2}\Big)\Big(\frac{A}{A_k}\Big)^{-2/(k(k-1))}\ .$$

Si $r < k$, la solution de $\mathcal{P}^-(A,k)$ est donnée par : $x_1^*, \ldots, x_{r-1}^*$ sont solution de $\mathcal{P}^-(A,r)$ et $x_r^*, \ldots, x_{k-1}^* = 0$. On a ainsi

$$\mathcal{M}^-(A,k) = k - r + \frac{r}{2}\Big(\frac{A}{A_r}\Big)^{-2/(r(r-1))} .$$

Démonstration. On applique la méthode des multiplicateurs de Kuhn et Tucker (*cf.* [Pch-Da], p.25). Il existe des multiplicateurs $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mu_i \geq 0$ avec $\mu_i x_i^* = 0$ et tels que

$$f_1(x) - \lambda g_1(x) - \sum_{1 \leq i \leq k-1} \mu_i x_i$$

soit minimum en x^* .

On peut voir que les x_i^* nuls sont ceux d'indice i grand : si l'on avait $x_j^* = 0$, $x_i^* < 0$ avec $i > j$, en permutant les valeurs de x_j^* et x_i^* on diminuerait f , car :

$$e^{x_i^*/j} + 1 < 1 + e^{x_i^*/i} .$$

La solution est donc du type :

$$x_1^*, \ldots, x_{s-1}^* < 0 \quad \text{et} \quad x_s^* = \cdots = x_{k-1}^* = 0 \quad \text{avec } 1 \leq s \leq k .$$

Pour un s fixé, $2 \leq s \leq k$, on résoud comme dans le problème 1, et on trouve :

$$\lambda = \frac{1}{s-1}\Big(\frac{A}{A_s}\Big)^{-2/(s(s-1))}$$

$$x_j^* = j\log(j\lambda) \; ; \quad 1 \leq j \leq s-1 .$$

La condition d'admissibilité est $x_j^* < 0$, pour $1 \leq j \leq s-1$, soit $(s-1)\lambda < 1$, soit $A_s < A$, c'est-à-dire $2 \leq s \leq r$. Pour chacune de ces valeurs de s , on calcule le minimum de $f_1(x)$ correspondant et on trouve :

$$\lambda = k - s + \frac{s}{2}\Big(\frac{A}{A_s}\Big)^{-2/(s(s-1))} .$$

Or, le lemme 14 montre que ceci est minimum lorsque s est le plus grand possible, c'est-à-dire $s = r$.

Proposition 3. *Pour k fixé ≥ 2 , et $A > 0$, la solution $\mathcal{M}(A,k)$ du problème 1 est une fonction décroissante en A .*

Pour k fixé ≥ 2 et $A \geq 1$, la solution $\mathcal{M}^-(A,k)$ du problème 2 est une fonction décroissante en A .

Pour $A \geq 1$ fixé, on définit r par $A_r \leq A < A_{r+1}$.

La suite $(u_k)_{k \geq 2}$ définie par $u_k = k - 1 - \mathcal{M}^-(A,k)$ est une suite croissante en k , constante pour $k \geq r$, et majorée par $\sqrt{\log A}$.

Démonstration. Soit $A < A'$, et soit $x^* = (x_1^*, \dots, x_{k-1}^*)$ la solution de $\mathcal{P}(A,k)$. Alors, si l'on pose $\tilde{x}_1 = x_1^* + \log A/A' < x_1^*$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, x_2^*, \dots, x_{k-1}^*)$ est une solution possible de $\mathcal{P}(A',k)$ et $f_1(\tilde{x}) < f_1(x^*)$.

La même preuve est valable pour $\mathcal{P}^-(A,k)$.

Supposons $2 \le k \le r$. Nous savons que

$$\mathcal{M}^-(A,k) = \frac{k}{2}\Big(\frac{A}{A_k}\Big)^{-2/(k(k-1))}$$

et il résulte du lemme 14 que

$$u_2 \le u_3 \le \dots \le u_r \ .$$

Supposons maintenant que $k > r$. La solution du problème d'optimisation N° 2 nous indique que

$$u_k = r - 1 - \Big(\frac{r}{2}\Big)\Big(\frac{A}{A_r}\Big)^{-2/(r(r-1))} = M(A,r)$$

et l'on applique le lemme 13, (i).

Problème d'optimisation N° 3. *Soit $k \ge 2$ et $B \ge 1$. La solution du problème :*

$$\mathcal{P}_3(B,k)\left\{\begin{array}{l} \max \displaystyle\sum_{1\le i\le k-1} (1 - y_i/y_{i+1}) \\ 1 \le y_1 \le y_2 \le \dots \le y_k \\ y_1 y_2 \dots y_k = B \end{array}\right.$$

est $k - 1 - \mathcal{M}^-(B,k) \le \sqrt{\log B}$.

Démonstration. Si l'on fixe $y_1 \le B^{1/k}$, par le changement de variable

$$x_i = i \log(y_{k-i}/y_{k-i+1})$$

on se ramène au problème $\mathcal{P}^-(B/y_1^k, k)$, et le maximum pour y_1 fixé est $k-1-\mathcal{M}^-(B/y_1^k,k)$. D'après la proposition précédente, ceci est maximum lorsque $y_1 = 1$, et $\le \sqrt{\log B}$.

Remarque. Il résulte également de la proposition 3 que la solution du problème 3 reste la même si l'on remplace la dernière contrainte par : $y_1 y_2 \dots y_k \le B$.

Proposition 4. *Soit $k \ge 2$ et des nombres réels > 0 vérifiant :*

$$1 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_k \ .$$

On a l'inégalité

$$\sum_{1\le i\le k-1}(1-t_i/t_{i+1})\le\sqrt{\log\Big(\prod_{1\le i\le k}t_i\Big)}\ .$$

Démonstration. On pose, dans le problème d'optimisation précédent $y_i = t_i$.

C. Pomerance nous a donné une démonstration directe de cette inégalité, par récurrence sur k , et utilisant le calcul de la différentielle de la fonction

$$\sqrt{\sum \log t_i}-\sum_{i=1}^{k-1}(1-t_i/t_{i+1})\ .$$

Problème d'optimisation N° 4. *Soit* $k\ge 2$, $B\ge 1$ *et* $z\ge 1$ *vérifiant* $z^k\le B$. *La solution du problème :*

$$\mathcal{P}_4(B,k,z)\left\{\begin{array}{l}\max\displaystyle\sum_{1\le i\le k-1}(1-y_i/y_{i+1})\\ z\le y_1\le y_2\le\ldots\le y_k\\ y_1y_2\ldots y_k=B\end{array}\right.$$

vaut $\mathcal{M}_4(B,k,z)=k-1-\mathcal{M}^-(B/z^k,k)$.

Lorsque $B\to+\infty$, *que* $\log z=\mathrm{O}(\log B)^{1/10}$ *et que* $B/z^k\to+\infty$, *on a :*

$$(13)\qquad \mathcal{M}_4(B,k,z)\le\sqrt{\log B}-\log z-1/2+\mathrm{o}(1)\ .$$

Démonstration. Ce problème se ramène à $\mathcal{P}_3(B/z^k,k)$ par le changement de variables $y_i'=y_i/z$.

Lorsque $B/z^k<A_k$, on définit r par $A_r\le B/z^k<A_{r+1}$, et l'on a :

$$\mathcal{M}_4(B,k,z)=M(B/z^k,r)\le M(B/z^r,r)$$

puisque $k>r$. Lorsque $B/z^k\ge A_1$, on a :

$$\mathcal{M}_4(B,k,z)=M(B/z^k,k)\ .$$

Pour démontrer (13), on doit donc prouver :

$$(14)\qquad M(B/z^k,k)\le\sqrt{\log B}-\log z-1/2+\mathrm{o}(1)$$

lorsque $B/z^k\to+\infty$, $\log z=\mathrm{o}(\log B)^{1/10}$ et $B/z^k\ge A_k$.

1er cas: $k \leq (1/2)\sqrt{\log B}$. La définition de $M(A,k)$ donnée dans le lemme 13 indique $M(A,k) \leq k$ et (14) en découle.

2e cas: $k \geq 2\sqrt{\log B} - (\log B)^{7/20}$. Le lemme 13, (ii) donne :

$$\begin{aligned} M(B/z^k, k) &\leq (\log B - k \log z)^{1/2} - 1/2 + \mathrm{o}(1) \\ &\leq \sqrt{\log B}\Big(1 - \frac{k \log z}{2 \log B}\Big) - 1/2 + \mathrm{o}(1) \\ &\leq \sqrt{\log B} - \log z - 1/2 + \frac{\log z}{2(\log B)^{3/20}} + \mathrm{o}(1) \end{aligned}$$

et comme $\log z = \mathrm{o}(\log B)^{1/10}$, cela démontre (14).

3e cas: $(1/2)\sqrt{\log B} \leq k \leq 2\sqrt{\log B} - (\log B)^{7/20}$. On a donc :

$$k \asymp \sqrt{\log B} \ .$$

On pose $A = B/z^k$, et avec les notations du lemme 13, (iv),

$$-\log(1-\rho/k) = \frac{2}{k(k-1)}(\log A - \log A_k) \leq \frac{2 \log B}{k(k-1)} \leq 8 + \mathrm{o}(1)$$

et il s'en suit que

$$-\log(1-\rho/k) \asymp \rho/k \ .$$

On a alors, par le lemme 12, (i) :

$$\begin{aligned} \log A - \log A_k &= \log B - k \log z - \log A_k \\ &= \log B - k^2/4 + \mathrm{O}(\log B)^{6/10} \\ &= (\sqrt{\log B} - k/2)(\sqrt{\log B} + k/2) + \mathrm{O}(\log B)^{6/10} \end{aligned}$$

et le terme en O est négligeable devant le premier terme. Il s'en suit que

$$\rho = \sqrt{\log B} - k/2 \gg (\log B)^{7/20} \ .$$

On applique alors le lemme 13, (iv) :

$$(1/2 + M(A,k))^2 \leq \log A - R$$

avec $R \gg \rho^3/k$. On en déduit :

$$\begin{aligned} 1/2 + M(A,k) &\leq \sqrt{\log B}\left(1 - \frac{k \log z}{\log B} - \frac{R}{\log B}\right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\log B}\left(1 - \frac{k \log z}{2\log B} - \frac{R}{2\log B}\right) \\ &= \sqrt{\log B} - \log z + \frac{1}{\sqrt{\log B}}[\log z(\sqrt{\log B} - k/2) - R/2]. \end{aligned}$$

Dans le crochet, le premier terme est de l'ordre de $\rho \log z$ et $R \gg \rho^3/k$. On a $\rho^2/k \gg (\log B)^{4/20} \gg \log z$, ce crochet est donc négatif, et cela montre (14).

Démonstration du théorème 2, (i). On écrit

$$n = q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k}; \qquad q_1 < q_2 < \dots < q_k \ .$$

On choisit z un nombre premier compris entre $(1/2)\log n$ et $\log n$. On détermine s tel que $q_{s-1} < z \leq q_s$.

1er cas: z divise n . On a alors $z = q_s$. Il vient :

$$F(n) = \sum_{i=1}^{s-1}(1 - q_i/q_{i+1}) + \sum_{i=s}^{k-1}(1 - q_i/q_{i+1}) = S_1 + S_2 \ .$$

Le lemme 6 donne :

$$S_1 = \log(q_s/q_1) - \sum_{i=1}^{s-1} L(q_i, q_{i+1}) \leq \log z - C - \log 2 + \mathrm{o}(1) \ .$$

Quant à S_2 , elle est majorée par la solution du problème d'optimisation N° 4 :

$$S_2 \leq \mathcal{M}_4(n, k-s, z) \leq \sqrt{\log n} - \log z - 1/2 + \mathrm{o}(1) \ .$$

Au total,

$$F(n) = S_1 + S_2 \leq \sqrt{\log n} - C' + \mathrm{o}(1)$$

avec $C' = C + \log 2 + 1/2 = 1.70...$.

2e cas: z ne divise pas n . On pose alors $n' = nz$. La démonstration du 1er cas montre :

$$F(n') \leq \sqrt{\log n'} - C' + \mathrm{o}(1) \leq \sqrt{\log n} - C' + \mathrm{o}(1)$$

et :

$$F(n') = F(n) + 1 - \Big(\frac{z - q_{s-1}}{z}\Big)\Big(\frac{q_s - z}{q_s}\Big) > F(n) \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème 2, (ii). Elle résulte de la proposition suivante:

Proposition 5. *Soit N tendant vers l'infini. Il existe $n \leq N$ tel que $F(n) \geq \sqrt{\log N} - C' + \mathrm{o}(1)$.*

Démonstration. On définit d'abord k en fonction de N par : $A_k \leq N < A_{k+1}$, où A_k est défini dans le lemme 12. On définit ensuite ρ par :

$$(N/A_k)^{-2/(k(k-1))} = 1 - \rho/k ,$$

et l'on sait par le lemme 12 (iii) que $0 \leq \rho \leq 1$.

La solution du problème d'optimisation N° 1, $\mathcal{P}(N,k)$ est donnée par : $\lambda = (1/(k-1))(1-\rho/k)$ et $x_j^* = j\log(j\lambda)$ pour $1 \leq j \leq k-1$. La solution du problème d'optimisation N° 3 $\mathcal{P}_3(N,k)$ vaut $M(N,k)$, et est définie par $y_1 = 1$, et $y_{j+1}/y_j = \exp(-x_{k-j}^*/(k-j)) = 1/((k-j)\lambda)$. On a donc, pour $2 \leq j \leq k$:

$$y_j = \Big(\frac{k-1}{k-\rho}\Big)^{j-1} \frac{k^{j-1}}{(k-1)\dots(k-j+1)} , \tag{15}$$

pour $1 \leq j \leq k-1$:

$$\frac{k-1}{k-j} \leq \frac{y_{j+1}}{y_j} = \frac{(k-1)k}{(k-j)(k-\rho)} \leq \frac{k}{k-j} , \tag{16}$$

et d'après le lemme 13,

$$M(N,k) = \sum_{j=1}^{k-1} 1 - y_j/y_{j+1} = \sqrt{\log N} - 1/2 + \mathrm{o}(1) . \tag{17}$$

Comme $0 \leq \rho \leq 1$, il résulte de (15) :

$$\frac{(k-2)^{j-2}}{(k-2)\dots(k-j+1)} \leq y_j \leq \frac{k^{j-1}}{(k-1)\dots(k-j+1)}$$

et, en utilisant (1), on a pour $j \leq k/2$:

$$\log y_j \leq -\sum_{i=1}^{j-1} \log(1-i/k) \leq \frac{j(j-1)}{2k} + \frac{j^3}{2k^2} , \tag{18}$$

et

$$\log y_j \geq -\sum_{i=2}^{j-1} \log\Big(1 - \frac{i-2}{k-2}\Big) \geq \frac{(j-3)(j-2)}{2k} . \tag{19}$$

Nous allons construire une famille de nombres premiers, aussi proches que possible des nombres y_k , dont le produit sera l'entier n cherché.

On choisit $r = \lfloor\sqrt{3k\log k}\rfloor + 4$. On a, par (19)

$$\log y_r \geq \frac{(r-3)(r-2)}{2k} \geq \frac{3}{2}\log k . \tag{20}$$

Pour tout $j \geq r$, on a :

$$\begin{aligned} y_{j+1} - y_j &= y_j\Big(\frac{k-1}{k-j}\,\frac{k}{k-\rho} - 1\Big) \geq y_j\Big(\frac{k-1}{k-j} - 1\Big) = y_j\,\frac{j-1}{k} \\ &\geq y_r^{1/3}\frac{r-1}{k}y_j^{2/3} \geq \sqrt{3\log k}\; y_j^{2/3} \geq y_j^{2/3} . \end{aligned}$$

Pour $r \leq j \leq k$, on désigne par P_j le nombre premier qui précède immédiatement y_j . On a, d'après le lemme 2: $P_{j+1} > y_j$. Il vient ensuite:

$$\frac{P_j}{P_{j+1}} + \frac{y_j(1+\mathrm{O}(y_j^{-1/3}))}{y_{j+1}(1+\mathrm{O}(y_{j+1}^{-1/3}))} = \frac{y_j}{y_{j+1}}(1+\mathrm{O}(y_j^{-1/3})) = \frac{y_j}{y_{j+1}} + \mathrm{O}(y_j^{-1/3}) .$$

On doit maintenant majorer :

$$\sum_{r\leq j\leq k-1} y_j^{-1/3} \leq y_r^{-1/3}\sum_{j\geq 0}\Big(\frac{k-r}{k-1}\Big)^{j/3} = y_r^{-1/3}\frac{1}{1-\Big(1-\frac{r-1}{k-1}\Big)^{1/3}} .$$

En utilisant l'inégalité $(1-x)^{1/3} \leq 1 - x/3$, valable pour $0 \leq x \leq 1$, ceci est inférieur à : $y_r^{-1/3}\dfrac{3(k-1)}{r-1} = \mathrm{O}(1/\sqrt{\log k})$. On a donc :

$$\sum_{r\leq j\leq k-1}(1 - P_j/P_{j+1}) = \sum_{r\leq j\leq k-1}(1 - y_j/y_{j+1}) + \mathrm{O}(1/\sqrt{\log k}) . \tag{21}$$

On déduit ensuite de (18) :

$$\log y_r \leq \frac{(r-4)^2}{2k} + \mathrm{O}\Big(\frac{r}{k}\Big) + \mathrm{O}\Big(\frac{r^3}{k^2}\Big) \leq \frac{3}{2}\log k + \mathrm{O}\Big(\frac{(\log k)^{3/2}}{\sqrt{k}}\Big) .$$

Il s'ensuit que :

$$P_r \leq y_r \leq k^{3/2} + \mathrm{O}(k(\log k)^{3/2}) = (1+\mathrm{o}(1))k^{3/2} . \tag{22}$$

On choisit ensuite comme facteurs premiers de n tous les nombres premiers $p_1 = 2$, $p_2, \ldots, p_s \leq k^{1/4}$. On a par le lemme 7

$$\sum_{1\leq i\leq s}(1 - p_i/p_{i+1}) = \log p_{s+1} - \log 2 - C + \mathrm{O}(s^{-1/6}) . \tag{23}$$

Il reste à choisir les facteurs premiers de n entre p_s et P_r .

On choisit $q_0 = p_{s+1}$, puis, par récurrence, on détermine q_{i+1} dans l'intervalle $[q_i(1+1/\log^2 k), q_i(1+2/\log^2 k)]$. On détermine t tel que $q_t < P_r \leq q_{t+1}$. On a :

$$P_r \geq q_t \geq q_0(1+1/\log^2 k)^t \ ,$$

c'est-à-dire :

$$t\log(1+1/\log^2 k) \leq \log(P_r/q_0) = (5/4+\mathrm{o}(1))\log k \ ,$$

et :

$$t = \mathrm{O}(\log^3 k) \ .$$

L'inégalité (1) nous donne alors pour $1 \leq i \leq t-1$:

$$1 - q_i/q_{i+1} \leq \log(q_{i+1}/q_i) \leq 1 - q_i/q_{i+1} + \frac{1}{2}\Big(\frac{q_{i+1}-q_i}{q_i}\Big)^2$$

et comme $\sum_{i=1}^{t-1}\Big(\frac{q_{i+1}-q_i}{q_i}\Big)^2 = \mathrm{O}(t/log^4 k) = \mathrm{O}(1/\log k)$, on a :

(24) $$\sum_{i=0}^{t-1}(1-q_i/q_{i+1}) = \log(q_t/q_0) + \mathrm{o}(1) = \log(P_r/p_{s+1}) + \mathrm{o}(1) \ .$$

On a également :

(25) $$\sum_{i=1}^{t}\log q_i \leq t\log P_r = \mathrm{O}(\log^4 k) \ .$$

On pose :

$$n = (\prod_{i=1}^{s+1} p_i)(\prod_{i=1}^{t} q_i)(\prod_{i=r}^{k} P_i) \ .$$

Par (19), on a :

$$\sum_{i=1}^{r-1}\log y_i \geq \sum_{i=1}^{r-1}\frac{(i-3)(i-2)}{2k} = \frac{(r-2)(r-3)(r-4)}{6k} \gg \sqrt{k} \ .$$

Par le lemme 1, on a :

$$\sum_{i=1}^{s+1}\log p_i = \mathrm{O}(k^{1/4}) \ ,$$

et avec (25), et le choix de $P_j \leq y_j$, on obtient

$$\log n \leq \sum_{i=1}^{k} \log y_i = \log N \ .$$

D'autre part, on a :

$$F(n) = \sum_{i=1}^{s}(1-p_i/p_{i+1}) + \sum_{i=0}^{t-1}(1-q_i/q_{i+1}) + (1-q_t/P_r) + \sum_{i=r}^{k-1}(1-P_i/P_{i+1}) \ .$$

Comme $q_t \sim P_r$, on a par (23), (24) et (21) :

$$F(n) = \log P_r - C - \log 2 + \sum_{i=r}^{k-1}(1-y_i/y_{i+1}) + \mathrm{o}(1) \ .$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r-1}(1-y_i/y_{i+1}) &= \sum_{i=1}^{r-1} 1 - \frac{(k-i)(k-\rho)}{k(k-1)} \\ &= -\frac{1-\rho}{k-1}(r-1) + \frac{r(r-1)(k-\rho)}{2k(k-1)} = \frac{3}{2}\log k + \mathrm{o}(1) \ . \end{aligned}$$

Il résulte de (20) et (22) que $\log P_r = \frac{3}{2}\log k + \mathrm{o}(1)$, et l'on a :

$$F(n) = \sum_{i=1}^{k-1}(1-y_i/y_{i+1}) - C - \log 2 + \mathrm{o}(1) \ ,$$

ce qui, avec (17) démontre la proposition.

Il est certainement possible d'améliorer le terme o(1) en un reste plus explicite, qui permettrait d'améliorer la proposition 6 sur les nombres F-champions, mais les calculs sont techniques.

Proposition 6. *Soit N un nombre F-champion, c'est-à-dire tel que $n < N \Rightarrow F(n) < F(N)$. Un tel nombre est sans facteur carré, et s'écrit $N = Q_1 Q_2 \ldots Q_k$, avec $Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_k$.*

Lorsque $N \to +\infty$, on a :

(i) $F(N) = \sqrt{\log N} - C' + \mathrm{o}(1)$.

(ii) $k = \omega(N) = 2\sqrt{\log N}(1 + \mathrm{O}(1/\log\log N))$.

(iii) $Q_k = \exp((2+\mathrm{o}(1))\sqrt{\log N})$.

(iv) $\lim_{N\to\infty}(Q_k/Q_{k-1}) = +\infty$.

(v) Soit p premier fixé, il existe n_0 tel que p divise tout nombre N , F-champion, supérieur à n_0 .

(vi) La quantité $Q(X)$ de nombres F-champion $\leq X$ vérifiée : $Q(X) \geq$ $\exp((9/10+\mathrm{o}(1))\sqrt{\log X})$.

Démonstration. (i) se déduit immédiatement du théorème 2 et de la proposition 5.

Supposons que $k_0 = 2\sqrt{\log n} - \varphi(n)(\log n)^{1/3}$, où $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$, et $\varphi(n) = \mathrm{o}(\log n)^{1/6}$, et que $\omega(n) = k \leq k_0$, alors $F(n) \leq P_3(n,k)$, solution du problème d'optimisation N° 3, et donc $F(n) \leq M(n,k) \leq M(n,k_0)$ par la proposition 3. Pour étudier $M(n,k_0)$, on fait $A = n$ et $k = k_0$ dans le lemme 13. On définit ρ par :

$$\log n - \log A_{k_0} = -\frac{k_0(k_0-1)}{2}\log(1-\rho/k_0) \ ,$$

et l'on déduit du lemme 12, (i) :

$$\rho/2 \sim \sqrt{\log n} - k_0/2 = \frac{1}{2}\varphi(n)(\log n)^{1/3} \ .$$

Le lemme 13, (iii) nous donne :

$$(1/2 + M(n,k_0))^2 \leq \log n - (1+o(1))\varphi^3(n)\sqrt{\log n}/12 \ .$$

Il s'ensuit que

$$1/2 + M(n,k_0) \leq \sqrt{\log n}\Big(1 - \Big(\frac{1}{24} + \mathrm{o}(1)\Big)\varphi^3(n)/\sqrt{\log n}\Big) \ .$$

D'après (i), un tel n ne peut être F-champion, et l'on a donc $\omega(N) \geq k_0$.

Pour majorer $\omega(N)$, considérons $n = q_1 q_2 \cdots q_k$, et choisissons $z = \sqrt{\log n}$. On détermine t par $q_t \leq z < q_{t+1}$. On a d'après (1) :

$$\sum_{i=1}^{t-1}(1 - q_i/q_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{t-1}\log(q_{i+1}/q_i) \leq \log z \ .$$

Par ailleurs, la proposition 4 appliquée aux nombres $q_{t+1}/z, \ldots, q_k/z$, donne :

$$\sum_{i=t+1}^{k-1}(1 - q_i/q_{i+1}) \leq \sqrt{\log(n/z^{k-t})} \ .$$

On a : $t \leq \pi(z)$ et donc $t\log z = \mathrm{O}(z)$. Il vient ensuite :

$$\begin{aligned} F(n) &\leq \log z + 2 + \sqrt{\log n - k\log z + \mathrm{O}(z)} \\ &\leq \sqrt{\log n} + \Big(\frac{1}{2} - \frac{k}{4\sqrt{\log n}}\Big)\log\log n + \mathrm{O}(1) \ . \end{aligned}$$

On voit donc qu'il existe a tel que, si $k \geq 2\sqrt{\log n}\Big(1 + \frac{a}{\log\log n}\Big)$ alors $F(n) \leq \sqrt{\log n} - 2C'$, et donc n ne peut pas être F-champion. Cela achève la preuve de (ii).

De l'inégalité (1), on déduit $F(N) \leq \log Q_k$, et (i) donne $Q_k \gg \exp(\sqrt{\log N})$.

Soit Q un nombre premier vérifiant $Q_k \log N \leq Q \leq 2Q_k \log N$. On a, par (i), et (i) du théorème 2 :

$$\sqrt{\log N} + 1 - C' + o(1) \leq F(NQ) \leq \sqrt{\log NQ} - C' + o(1) ,$$

d'où l'on déduit $\log Q \geq (2 + o(1))\sqrt{\log N}$, et

$$\log Q_k \geq \log(Q/(2\log N)) \geq (2 + o(1))\sqrt{\log N} . \tag{26}$$

On considère de même $F(N/Q_k) = F(N) - 1 + Q_{k-1}/Q_k$, et l'on a :

$$\sqrt{\log N} - 1 - C' + Q_{k-1}/Q_k + o(1) \leq \sqrt{\log N/Q_k} - C' + o(1) ,$$

d'où l'on déduit :

$$\log Q_k \leq 2(1 - Q_{k-1}/Q_k + o(1))\sqrt{\log N} ,$$

ce qui, avec (26), démontre à la fois (iii) et (iv).

Soit p fixé, et n non multiple de p . Posons $a_p = (1 - p^-/p)(1 - p/p^+) > 0$. Il résulte de la démonstration du lemme 6, que, si $n = q_1q_2 \ldots q_k$, on a:

$$\sum_{\substack{i \\ q_i \leq x}} L(q_i, q_{i+1}) \geq C + a_p - \log q_1 + \log 2 + o(1) .$$

La démonstration du théorème 2, (i) montre que pour un tel n , on a: $F(n) \leq \sqrt{\log n} - C' - a_p + o(1)$, qui, compte tenu de (i), montre que n n'est pas un nombre F-champion, ce qui prouve (v).

Pour démontrer (vi), on observe d'abord que $F(NQ_k^+/Q_k) > F(N)$, ce qui entraîne que, si l'on désigne par $(H_j)_{j\geq 1}$ la suite croissante des nombres F-champions, on a par le lemme 2 et (iii) :

$$H_{j+1} \leq H_j(1 + \exp\left((-\frac{9}{10} + o(1))\sqrt{\log H_j})\right)$$

pour j suffisamment grand.

Soit X assez grand, et soit $N_{j_0} \leq X/2 < N_{j_0+1}$. On a :

$$H_{j_0+k} \leq (X/2)(1 + \exp((-9/10 + o(1))\sqrt{\log X/2}))^k$$

et comme $(1 + u)^{(\log 2)/u} \leq 2$, on voit que pour $k \leq k_0$, avec

$$k_0 = (\log 2)\exp((9/10 + o(1))\sqrt{\log X/2})$$

on aura $H_{j_0+k} \leq X$, ce qui achève la preuve de (vi).

Remarque. Il nous est possible de donner d'autres propriétés des nombres F-champions. Cependant, nous n'avons pas pu obtenir une majoration satisfaisante pour $Q(X)$, et nous ne savons pas prouver pour le moment $Q(X) = o(X^\delta)$ avec $\delta < 1$. J.-P. Massias a construit une table des nombres F-champions jusqu'à un million.

Références

[Cra] H. Cramer, *On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers*, Acta Arithmetica **2** (1936), 23–46.

[De K-I] J.M. De Koninck et A. Ivić, *On the distance between consecutive divisors of an integer*, Canad. Math. Bull. (2) **29** (1986), 208–217.

[Erd 1] P. Erdös, *Problems and results on the difference of consecutive primes*, Publ. Math. Debrecen **1** (1949-50), 33-37.

[Erd 2] P. Erdös, *Some problems on number theory, Actes du colloque de théorie analytique et élémentaire des nombres*, CIRM, 30 mai–3 juin 1983, Publications Mathématiques d'Orsay 86-01, 53–67.

[Han] E.R. Hansen, *A table of series and products*, Prentice Hall, 1975.

[H-B] D.R. Heath-Brown, *The difference between consecutive primes III*, J. London Math. Soc. (2) **20** (1979), 177–178.

[H-B-Iwa] D.R. Heath-Brown and H. Iwaniec, *On the difference between consecutive primes*, Inv. Math. **55** (1979), 49–69.

[Maier] H. Maier, *Chains of large gaps between consecutive primes*, Advances in Math. **39** (1981), 257–269.

[Moz] C.J. Mozzochi, *On the difference between consecutive primes*, J. Number Theory **24** (1986), 181–187.

[Pch-Da] B. Pchenitchny et Y. Daniline, *Méthodes numériques dans les problèmes d'extremum*, Editions MIR, Moscou 1977.

[Rie] H. Riesel, *Prime numbers and computer methods for factorization Progress in Mathematics*, vol. 57, Birkhäuser 1985.

[Ros-Sch 1] J.B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. of Math. **6** (1962), 64–94.

[Ros-Sch 2] J.B. Rosser and L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$, Math. of Comp. **29** (1975), 243–269.

[Sch] L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$ *II*, Math. of Comp. **30** (1976), 337–360.

[Ten] G. Tenenbaum, *Sur un problème extrêmal en arithmétique*, Ann. Inst. Fourier **37**-2 (1987), 1-18.

[Vose] M.D. Vose, *Integers with consecutive divisors in small ratio*, J. of Number Theory **19** (1984), 233–238.

Jean-Louis NICOLAS
Département de Mathématiques
Université de Limoges
123, avenue Albert Thomas
F–87060 LIMOGES Cedex
France

Paul ERDÖS
A Magyar Akadémia
Matematikai Kutató Intézete
Reáltanoda u. 13– 15
Pf. 127 H–1364 BUDAPEST
Hongrie