SUR LES DENSITÉS DE CERTAINES SUITES D'ENTIERS

P. ERDÖS *et* G. TENENBAUM

[Received 14 June 1988]

1. *Introduction et résultats*

Soit n un nombre entier, $\omega(n)$ le nombre de ses facteurs premiers distincts et $\tau(n)$ le nombre de ses diviseurs. Nous désignons par $\{p_j(n)\colon 1 \leqslant j \leqslant \omega(n)\}$ la suite croissante des facteurs premiers et par $\{d_j(n)\colon 1 \leqslant j \leqslant \tau(n)\}$ celle des diviseurs. Le comportement normal de ces deux suites a été abondamment étudié dans la littérature—avec bien entendu des résultats plus précis pour la première. Les fonctions de répartition globales sont notamment assez bien connues: Erdös a montré en 1946 que l'on a, pour toute fonction $\xi(n) \to \infty$ et presque tout n,

$$\log_2 p_j(n) = j + O(\sqrt{(j \log_2 j)}) \quad (\xi(n) \leqslant j \leqslant \omega(n)) \tag{1.1}$$

et l'on peut en déduire que

$$\log_2 d_j(n) = \frac{\log j}{\log 2} + O(\sqrt{(\log j \log_3 j)}) \quad (\xi(n) \leqslant j \leqslant \tau(n)) \tag{1.2}$$

(ici et dans la suite, $\log_k$ désigne la k-ième itérée de la fonction logarithme). Le lecteur pourra consulter le chapitre 1 de [**4**] pour une démonstration détaillée de (1.1) et (1.2)—et en fait une version plus précise et optimale de ces évaluations—ainsi que pour d'autres renseignements connexes.

On dispose également de connaissances assez satisfaisantes pour les répartitions dans les 'petits intervalles'. Par exemple, Erdös a montré en 1969 que l'on a uniformément, pour $h(n)/\log_3 n \to \infty$ et presque tout n,

$$\log_2 p_{j+k}(n) - \log_2 p_j(n) \sim k \quad (k \geqslant h(n),\ 1 \leqslant j \leqslant \omega(n) - k).$$

On sait aussi qu'un résultat analogue pour les diviseurs est inenvisageable (voir [**12**; **4**, chapitre 1]) mais qu'en revanche les quantités

$$\log d_k(n) - \log d_j(n) \quad (1 \leqslant j < k \leqslant \tau(n))$$

sont assez bien réparties dans l'intervalle $[0, \log n]$ (voir [**4**, chapitre 5]).

Une approche plus directe des lois locales consiste à considérer les entiers n pour lesquels $p_k(n)$ ou $d_k(n)$ sont fixés. Dans cette optique, nous nous proposons ici d'entreprendre l'étude des densités naturelles

$$\lambda_k(p) := \mathrm{dens}\{n\colon\ p_k(n) = p\}, \tag{1.3}$$

et

$$\Lambda_k(d) := \mathrm{dens}\{n\colon\ d_k(n) = d\}. \tag{1.4}$$

L'existence de ces densités découle immédiatement du fait que les suites en cause sont des réunions finies de classes de congruences. Dans le cas de (1.3), le

---

A.M.S. (1980) subject classification: 11N25, 11N37.

Proc. London Math. Soc. (3) 59 (1989) 417–438.

crible d'Eratosthène fournit l'écriture explicite

$$\lambda_k(p) = p^{-1} \prod_{q<p} (1-q^{-1}) \sum_{\substack{P(m)<p \\ \omega(m)=k-1}} m^{-1}, \tag{1.5}$$

où la lettre q désigne un nombre premier, et où nous désignons par $P(m)$ le plus grand facteur premier de l'entier m.

Dans (1.5), seule l'évaluation de la somme en m, disons $s_{k-1}(p)$, présente une difficulté. Le problème est analogue à celui de la détermination asymptotique de la quantité

$$\pi_k(x) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \omega(n)=k}} 1.$$

Nous avons ainsi le choix entre les méthodes élémentaires (cf. Pomerance [**9**]) et les méthodes analytiques reposant sur la méthode du col (cf. Hensley [**5**], Hildebrand et Tenenbaum [**6**, **7**]). Quoique les premières soient, en l'état actuel des connaissances, plus efficaces pour les très grandes valeurs de k, nous avons choisi d'employer ici les secondes qui sont seules susceptibles de fournir des formules asymptotiques dans un large domaine.

Le point de départ est l'identité

$$\sum_{j=0}^{\infty} s_j(p) z^j = F(z,p) := \prod_{q<p} \left(1 + \frac{z}{q-1}\right) \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{1.6}$$

d'où l'on déduit la majoration de type 'Rankin'

$$s_j(p) \leqslant \min_{r>0} F(r,p) r^{-j} \quad (j \geqslant 0). \tag{1.7}$$

On a évidemment $s_j(p) = 0$ si $j \geqslant \pi(p)$ et

$$s_j(p) = \prod_{q<p} (q-1)^{-1} \quad (j = \pi(p) - 1).$$

Nous pouvons donc nous restreindre au cas $j \leqslant \pi(p) - 2$. Sous cette condition le minimum (1.7) est atteint pour une valeur unique $r = \rho = \rho(j,p)$, solution de l'équation

$$\sum_{q<p} \rho/(q-1+\rho) = j. \tag{1.8}$$

Nous verrons au § 2 (Lemme 1) que l'on peut évaluer ρ avec une bonne précision lorsque $j \leqslant p^{1-\varepsilon}$. Posons, pour $1 \leqslant k \leqslant \pi(p)$,

$$\begin{aligned} &L = \log\left(\frac{\log p}{\log(k+1)}\right), \quad M = \log_2 p - \log(1 + \log^+(k/L)), \\ &R = L(1 + \log^+(k/L)). \end{aligned} \tag{1.9}$$

(Ici et dans la suite on utilise la notation $\log^+ x = \max(0, \log x)$, $x \in \mathbb{R}$.) Nous établirons que l'on a pour chaque $\varepsilon > 0$ et uniformément, pour $1 \leqslant k \leqslant p^{1-\varepsilon}$,

$$\rho(k-1,p) = \frac{k-1}{M}(1 + O(R^{-1})) = \frac{k-1}{L}\left(1 + O\left(\frac{\log L}{L}\right)\right). \tag{1.10}$$

Avec les notations (1.9), nous pouvons énoncer le résultat suivant, typique de l'emploi de la méthode du col. Nous posons

$$w(t)=\begin{cases}\Gamma(t+1)t^{-t}e^{t} & (t>0),\\ 1 & (t=0).\end{cases} \tag{1.11}$$

THÉORÈME 1. *Soit $\varepsilon>0$. On a uniformément, pour $1\leqslant k\leqslant p^{1-\varepsilon}$,*

$$\lambda_k(p)=\frac{F(\rho,p)\rho^{1-k}}{pF(1,p)w(k-1)}(1+O(R^{-1})) \tag{1.12}$$

où ρ est la solution de (1.8) *avec $j=k-1$.*

Comme il se doit, l'évaluation inexplicite (1.12) fournit des formules explicites lorsqu'on y insère une approximation convenable pour ρ. Nous pouvons ainsi énoncer le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. *Dans les conditions du théorème* 1, *on a*

$$\lambda_k(p)=\frac{1}{pF(1,p)}\cdot\frac{M^{k-1}}{(k-1)!}\exp\Big\{O\Big(\frac{k-1}{R}\Big)\Big\}. \tag{1.13}$$

Plus précisément, on a également dans le même domaine

$$\lambda_k(p)=\frac{F((k-1)/M,p)}{pF(1,p)}\cdot\frac{(M/e)^{k-1}}{(k-1)!}\exp\{O((k-1)/R^2)\}. \tag{1.14}$$

On sait que l'un des attraits spécifiques de la méthode du col est de permettre l'étude du comportement local et l'obtention de formules 'semi-asymptotiques' (cf. [**13**]). Dans le cas de $\lambda_k(p)$, nous obtenons les deux résultats suivants.

COROLLAIRE 2. *Dans les conditions du théorème* 1, *on a*

$$\frac{\lambda_{k+1}(p)}{\lambda_k(p)}=\frac{M}{k}(1+O(R^{-1})). \tag{1.15}$$

COROLLAIRE 3. *Soit $\varepsilon>0$. On a uniformément pour $1\leqslant k\leqslant p^{1-\varepsilon}$, $p^{1-L/R}\leqslant p'\leqslant p^{1+L/R}$,*

$$\frac{p'\lambda_k(p')}{p\lambda_k(p)}=(1+\eta)^{(k-1-M)/M}\exp\Big\{O\Big(\frac{k}{L}\Big(\frac{|\eta|}{k}+e^{-\sqrt{\log p}}\Big)+\frac{1}{R}\Big)\Big\} \tag{1.16}$$

où η est implicitement défini par $p'=p^{1+\eta}$.

Puisque $M\ll R$, il découle du Corollaire 2 qu'il existe une constante absolue c_0 telle que, lorsque p et ε sont fixés, $\lambda_k(p)$ soit croissante pour $k\leqslant \log_2 p-c_0$, et décroissante pour $\log_2 p+c_0\leqslant k\leqslant p^{1-\varepsilon}$. Il est raisonnable de conjecturer, au vu de ce résultat, que $\lambda_k(p)$ est en réalité une fonction unimodale de k. Ainsi que l'a remarqué Balazard dans une lettre au second auteur, on peut facilement établir ce point en utilisant directement (1.5). Nous pouvons encore déduire du Théorème 1 et du Corollaire 2 le résultat suivant.

COROLLAIRE 4. *On a*

$$\max_{k\geqslant 1}\lambda_k(p)=\frac{1+O(1/\log_2 p)}{p\sqrt{(2\pi\log_2 p)}}\quad(p\to\infty). \tag{1.17}$$

De plus, toute valeur de k réalisant ce maximum satisfait à

$$k = \log_2 p + O(1). \tag{1.18}$$

Les variations de $\lambda_k(p)$ à k fixé posent un problème plus difficile. Erdös a énoncé dans [3] que le maximum est atteint lorsque $\log p \sim k$, mais cette assertion résulte d'un lapsus. En utilisant le Corollaire 3, nous pouvons en fait montrer le résultat suivant.

COROLLAIRE 5. *On a*

$$\max_p \lambda_k(p) = \exp\Big\{-k\Big(\log k - \log_2 k - 1 + \frac{2\log_2 k + 1}{\log k} + \frac{2(\log_2 k)^2 - \log_2 k + O(1)}{(\log k)^2}\Big)\Big\}. \tag{1.19}$$

De plus, toute valeur de p réalisant ce maximum satisfait à

$$\log p = \frac{k}{\log k}\Big\{1 + \frac{2\log_2 k}{\log k} + \frac{2(\log_2 k)^2 - 3\log_2 k + O(1)}{(\log k)^2}\Big\}. \tag{1.20}$$

Comme on peut s'y attendre, les résultats concernant $\Lambda_k(d)$ sont nettement moins précis. La première question naturelle consiste à se demander pour quelles valeurs relatives de k et d on a $\Lambda_k(d) \neq 0$. Le lecteur se convaincra aisément qu'une condition nécessaire est $\tau(d) \leqslant k \leqslant d$. Nous pouvons montrer qu'elle est suffisante.

THÉORÈME 2. *Soit $d \geqslant 1$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*
(a) $\Lambda_k(d) > 0$;
(b) $\tau(d) \leqslant k \leqslant d$.

Nous établissons le résultat au § 4 lorsque $d \geqslant 5000$. La vérification numérique pour $1 \leqslant d \leqslant 5000$ a été effectuée par Maurice Margenstern à l'Université de Paris XI-Orsay. Les auteurs ont le plaisir de le remercier ici pour cette contribution.

L'étude des maxima partiels de $\lambda_k(p)$, qui fait l'objet des corollaires 4 et 5, trouve son pendant dans les deux résultats suivants, relatifs à $\Lambda_k(d)$.

THÉORÈME 3. *La lettre γ désignant la constante d'Euler, on a*

$$\frac{e^{-\gamma} + O(1/\log d)}{d \log d} \leqslant \max_k \Lambda_k(d) \leqslant \frac{3\log_3 d + O(1)}{d\sqrt{\log_2 d}} \quad (d \to \infty). \tag{1.21}$$

De plus, toute valeur de k réalisant ce maximum satisfait à

$$\tau(d) \leqslant k \leqslant \tau(d)(\log d)^{e\log 2 + o(1)}. \tag{1.22}$$

THÉORÈME 4. *Posons pour $k \geqslant 3$,*

$$K := \exp\Big\{\frac{\log k \cdot \log_2 k}{\log 2}\Big\}. \tag{1.23}$$

On a

$$(1.24)\quad K^{-1}k^{-(\log_3 k+O(1))/\log 2}\leqslant \max_d \Lambda_k(d)\leqslant K^{-1}k^{(\log_3 k+O(1))/\log 2}\quad (k\to\infty).$$

De plus, toute valeur de d réalisant ce maximum satisfait à

$$(1.25)\qquad K^{\alpha+o(1)}\leqslant d\leqslant K^{1+o(1)}$$

où $\alpha=0{,}293\,815\ldots$ *est la solution de l'équation*

$$(1.26)\qquad (\alpha+1)\log(\alpha+1)-\alpha\log\alpha=\log 2.$$

Il est possible que la quantité $\max_k \Lambda_k(d)$ dépende fortement de la structure arithmétique de d et que l'encadrement (1.21) ne soit pas très éloigné de l'optimalité. Par exemple, si $d=p$, $k=2^j+1$, on a

$$\Lambda_k(p)\geqslant\frac{1}{p}\prod_{q<p}\left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_{\substack{m<p\\ \omega(m)=j}}\frac{\mu(m)^2}{m}.$$

Lorsque $j=[\log\log p]$, la somme intérieure peut être facilement estimée, par intégration par parties, grâce à un théorème de Selberg [**11**]. Elle est

$$\gg\frac{(\log\log p)^j}{j!}\sim\frac{\log p}{\sqrt{(2\pi\log_2 p)}}\quad (p\to\infty)$$

de sorte que

$$(1.27)\qquad \max_k \Lambda_k(p)\gg 1/p\sqrt{\log_2 p}.$$

De même, il paraît vraisemblable que la borne inférieure de (1.21) soit essentiellement atteinte lorsque d possède beaucoup de diviseurs. Il serait intéressant de savoir si (1.22) peut être amélioré en

$$k=\tau(d)^{1+o(1)}$$

pour presque tout d. On aurait ainsi $k=(\log d)^{\log 2+o(1)}$, ce qui confirmerait (1.2) comme (1.18) confirme (1.1).

Dans [**3**], Erdös a énoncé que le maximum (1.24) est nécessairement réalisé lorsque d satisfait à

$$\log d\sim\log k\cdot\log_2 k.$$

Cette affirmation n'est pas en contradiction avec (1.25) puisque $\alpha<\log 2$. Elle doit cependant être retirée pour l'instant, suite à une imprécision dans la démonstration (non publiée). Il semble en fait aujourd'hui plus pertinent de conjecturer que (1.24) est réalisé lorsque

$$d=K^{1+o(1)}$$

mais la borne inférieure de (1.25) apparaît très difficile à améliorer: nous verrons par exemple au § 6 que l'on a

$$(1.28)\qquad \max_{d\leqslant K^{1/2+o(1)}}\Lambda_k(d)=K^{-1+o(1)}\quad (k\to\infty).$$

Les auteurs tiennent à remercier ici Richard R. Hall pour son aide lors de la préparation de ce travail.

2. *Démonstration du théorème* 1

Par commodité d'écriture, nous posons systématiquement $j=k-1$. Le principe de la preuve consiste à évaluer l'intégrale de Cauchy

$$s_j(p)=\frac{1}{2\pi i}\oint F(z,p)z^{-j-1}\,dz \tag{2.1}$$

par la méthode du col. Nous choisissons à cet effet le contour $|z|=\rho$ où ρ est défini par l'équation

$$\rho\frac{F'(\rho,p)}{F(\rho,p)}=\sum_{q<p}\frac{\rho}{q-1+\rho}=j. \tag{2.2}$$

Les détails sont semblables à ceux de l'étude de $\pi(x,k)$ dans [7], mais en fait plus simples. En effet, le problème considéré dans [7] nécessitait l'introduction de deux variables complexes et donc d'un point-selle correspondant à une intégrale double.

Lemme 1. *Pour tout nombre premier* $p\geq 5$ *et tout nombre entier* j $(1\leq j\leq \pi(p)-2)$ *l'équation* (2.2) *possède une solution unique* $\rho=\rho(j,p)>0$. *De plus, avec les notations* (1.9) *on a pour tout* $\varepsilon>0$ *et uniformément pour* $1\leq j\leq p^{1-\varepsilon}$,

$$\rho=\frac{j}{M}(1+O(R^{-1}))=\frac{j}{L}\Big(1+O\Big(\frac{\log L}{L}\Big)\Big). \tag{2.3}$$

Démonstration. La première assertion découle du fait que le membre de gauche de (2.2) croît de 0 à $\pi(p)-1-0$ lorsque ρ parcourt $[0,+\infty[$. Pour montrer (2.3), nous pouvons supposer que $p\geq p_0(\varepsilon)$. En effet, dans le cas contraire j et M sont $\ll_\varepsilon 1$, de sorte que (2.2) équivaut à $p\ll_\varepsilon 1$ (une majoration trivialement réalisée). Lorsque $p_0(\varepsilon)$ est assez grand, on a

$$\rho\leq\tfrac{1}{2}p \tag{2.4}$$

puisque dans la circonstance opposée on aurait

$$\sum_{q<p}\frac{\rho}{q-1+\rho}>\tfrac{1}{2}p\sum_{q<p}\frac{2}{3p}=\tfrac{1}{3}(\pi(p)-1)>p^{1-\varepsilon}\geq j.$$

Maintenant, on peut écrire

$$\sum_{q<p}\frac{1}{q-1+\rho}=\sum_{\rho\leq q<p}\frac{1}{q}+O\Big(\frac{1}{\rho}\sum_{q<\rho}1+\sum_{\rho\leq q<p}\frac{\rho}{q(q+\rho)}\Big)$$
$$=\log\Big(\frac{\log\rho}{1+\log^+\rho}\Big)+O\Big(\frac{1}{1+\log^+\rho}\Big).$$

En reportant dans (2.2), il vient

$$\frac{j}{\rho}=\log\Big(\frac{\log p}{1+\log^+\rho}\Big)+O\Big(\frac{1}{1+\log^+\rho}\Big). \tag{2.5}$$

Nous obtiendrons le résultat escompté en insérant dans cette formule des approximations successives de ρ.

Dans un premier temps, remarquons que (2.4) et (2.5) impliquent

$$j/\rho \gg 1/\log p$$

d'où

$$\rho \ll j \log p \ll p^{1-\varepsilon/2}.$$

En reportant cette dernière majoration dans (2.5), il suit

$$\rho \ll j \tag{2.6}$$

d'où

$$1 \ll \frac{\log(j+1)}{1+\log^+ \rho} \ll \frac{j}{\rho}.$$

En insérant à nouveau cette évaluation dans (2.5), on obtient

$$j/\rho = L + O(1 + \log^+(j/\rho)). \tag{2.7}$$

Si L est grand, c'est-à-dire $j \geqslant p^{\eta}$ ou $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, la relation (2.7) implique tour à tour $j \asymp \rho L$ et

$$j/\rho = L + O(\log L) \tag{2.8}$$

d'où la seconde des formules (2.3). Cette estimation est en fait encore valable lorsque $p^{\eta} < j \leqslant p^{1-\varepsilon}$ puisqu'elle équivaut alors à (2.6). En particulier on a donc dans tous les cas

$$1 + \log^+ \rho = 1 + \log^+(j/L) = O(1).$$

En reportant dans (2.5), on obtient bien la première des formules (2.3).

Notre second résultat auxiliaire concerne la fonction $\varphi(z) = \log F(z, p)$ définie pour $\operatorname{Re} z > 0$ ou $|z| < 1$ par la formule

$$\varphi(z) = \sum_{q<p} \log(1 + z/(q-1)). \tag{2.9}$$

Lemme 2. *Avec les notations* (1.9) *et* (2.9) *on a, pour tout* $\varepsilon > 0$ *et uniformément pour* $1 \leqslant j \leqslant p^{1-\varepsilon}$,

$$\varphi(\rho) = j(1 + O(R^{-1})), \tag{2.10}$$

$$\varphi(\rho z) - \varphi(\rho) = j(z-1) + O(j\,|z-1|^2 R^{-1}) \quad (|z-1| \leqslant (1+\rho)/2\rho). \tag{2.11}$$

Démonstration. Montrons (2.10). On a par (2.9),

$$\begin{aligned}\varphi(\rho) &= \sum_{2\rho\leqslant q<p} \left\{\frac{\rho}{q-1} + O\left(\left(\frac{\rho}{q-1}\right)^2\right)\right\} + O\left(\sum_{q\leqslant 2\rho} \log\left(1 + \frac{\rho}{q-1}\right)\right)\\ &= \rho \log\left(\frac{\log p}{1+\log^+ \rho}\right) + O\left(\frac{\rho}{1+\log^+ \rho}\right)\end{aligned}$$

d'après le théorème des nombres premiers. En estimant ρ par (2.3), on obtient bien (2.10).

Pour établir (2.11), on remarque que $\varphi(\rho z)$ est bien définie dans le disque $|z-1| \leqslant (1+\rho)/2\rho$. Grâce à (2.9), on peut écrire alors

$$\varphi(\rho z) - \varphi(z) = \sum_{q<p} \log\left(1 + \frac{\rho(z-1)}{q-1+\rho}\right).$$

En développant le logarithme à l'ordre 2, il vient

$$\varphi(\rho z)-\varphi(z)=\sum_{q<p}\frac{\rho(z-1)}{q-1+\rho}+O\Big(\rho^2|z-1|^2\sum_{q<p}(q^2+\rho^2)^{-1}\Big).$$

Par définition de ρ, le terme principal de cette formule est égal à $j(z-1)$. La somme en q du terme d'erreur est

$$\ll \sum_{q\leqslant\rho}\rho^{-2}+\sum_{q>\rho}q^{-2}\ll\rho^{-1}(1+\log^+\rho)^{-1}\asymp\rho^{-2}jR^{-1}$$

d'après (2.3). Cela achève la démonstration du lemme 2.

LEMME 3. *Il existe une constante absolue $c_1>0$ telle que l'on ait, pour tout $\varepsilon>0$ et uniformément pour $1\leqslant j\leqslant p^{1-\varepsilon}$,*

$$|F(\rho e^{i\theta},p)|\ll\exp\{-c_1j\theta^2\}F(\rho,p)\quad(|\theta|\leqslant\pi). \tag{2.12}$$

Démonstration. Pour tout nombre premier q, on a

$$\begin{aligned}\Big|1+\frac{\rho e^{i\theta}}{q-1}\Big|^2&=1+\frac{2\rho\cos\theta}{q-1}+\frac{\rho^2}{(q-1)^2}\\&=\Big(1+\frac{\rho}{q-1}\Big)^2\Big(1-\frac{2\rho(1-\cos\theta)}{(q-1)(1+\rho/(q-1))^2}\Big).\end{aligned}$$

En effectuant le produit de ces égalités pour $q<p$, on obtient

$$\begin{aligned}|F(\rho e^{i\theta},p)|\cdot F(\rho,p)^{-1}&\leqslant\exp\Big\{-\tfrac14\rho\sum_{\rho+1\leqslant q<p}\frac{1-\cos\theta}{q-1}\Big\}\\&\leqslant\exp\Big\{-\frac{\rho\theta^2}{2\pi^2}\sum_{\rho+1\leqslant q<p}\frac{1}{q-1}\Big\}\\&\leqslant\exp\Big\{-\frac{\rho\theta^2}{2\pi^2}\log\Big(\frac{\log p}{1+\log^+\rho}\Big)+O(1)\Big\}.\end{aligned}$$

En évaluant ρ par (2.3), on obtient bien (2.12).

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration du théorème 1.

Nous allons évaluer l'intégrale (2.1) en faisant appel aux lemmes 2 et 3. A cette fin nous distinguons deux cas selon que ρ est 'grand' ou 'petit'.

Lorsque $\rho\leqslant\frac13$, alors $|z|=1$ implique $|z-1|\leqslant(1+\rho)/2\rho$ et la relation (2.11) est applicable pour évaluer l'intégrande de (2.1) en tous points du cercle $|z|=\rho$. On peut donc écrire

$$s_j(p)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}F(\rho,p)e^{j(z-1)}(1+O(j|z-1|^2R^{-1}))\rho^{-j}z^{-j-1}\,dz.$$

On a en effet $jR^{-1}\ll\rho\ll1$, de sorte que la formule précédente découle immédiatement de (2.11). En explicitant le terme principal, il vient

$$s_j(p)=F(\rho,p)(e\rho)^{-j}\Big\{\frac{j^j}{j!}+O\Big(\frac{j}{R}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\cos\theta}(1-\cos\theta)\,d\theta\Big)\Big\}.$$

La dernière intégrale est classiquement

$$\ll e^j \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2j\theta^2/\pi^2}\theta^2\, d\theta \ll e^j j^{-\frac{3}{2}} \ll \frac{j^j}{j!}\cdot\frac{1}{j}.$$

D'où

$$\begin{aligned} s_j(p) &= F(\rho, p)((j/e\rho)^j/j!)(1+O(R^{-1})) \\ &= (F(\rho, p)\rho^{-j}/w(j))(1+O(R^{-1})). \end{aligned}$$

Nous avons donc établi (1.12) dans le cas $\rho \leq \frac{1}{3}$.

Lorsque $\rho > \frac{1}{3}$, on a $j \gg L$ d'après le lemme 1 et nous allons évaluer l'intégrale de Cauchy (2.1) en développant $F(\rho e^{i\theta})$ en série de Taylor au voisinage de $\theta = 0$. D'après le lemme 2, il existe une constante absolue c_2 telle que l'on ait pour $|w| \leq c_2$, $w \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(\rho e^{iw}) = \varphi(\rho) + j(e^{iw}-1) + O(j\,|w|^2 R^{-1}). \tag{2.13}$$

Par la formule de Cauchy, on en déduit que pour tout nombre entier $h \geq 1$, on a

$$\sigma_h := i^{-h}\left[\frac{d^h\varphi(\rho e^{iw})}{dw^h}\right]_{w=0} = j(1+O(R^{-1})). \tag{2.14}$$

En remarquant que $\sigma_1 = j$ par définition de ρ, on peut donc écrire, pour $|\theta| \leq c_2$,

$$\varphi(\rho e^{i\theta}) = \varphi(\rho) + ij\theta - \tfrac{1}{2}\sigma_2\theta^2 - \tfrac{1}{6}i\sigma_3\theta^3 + O(j\theta^4)$$

où la majoration du terme d'erreur découle également de (2.13). Par conséquent, on a, pour $|\theta| \leq c_2 j^{-\frac{1}{3}}$,

$$F(\rho e^{i\theta}, p)e^{-i\theta j} = F(\rho, p)e^{-\frac{1}{2}\sigma_2\theta^2}(1 - \tfrac{1}{6}i\sigma_3\theta^3 + O(j\theta^4 + j^2\theta^6)). \tag{2.15}$$

Désignons par J_1 et J_2 les contributions respectives des domaines $|\theta| \leq c_2 j^{-\frac{1}{3}}$ et $c_2 j^{-\frac{1}{3}} < |\theta| \leq \pi$ à l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(\rho e^{i\theta}, p)}{F(\rho, p)} e^{-ij\theta}\, d\theta.$$

Par (2.1), on a alors

$$s_j(p) = \frac{F(\rho, p)\rho^{-j}}{2\pi}(J_1 + J_2) \tag{2.16}$$

et il découle de (2.15) que l'on a

$$J_1 = \int_{|\theta| \leq c_2 j^{-1/3}} e^{-\frac{1}{2}\sigma_2\theta^2}(1 + O(j\theta^4 + j^2\theta^6))\, d\theta$$

car la contribution du terme en θ^3 est nulle par symétrie. En effectuant le changement de variable $t = \theta\sqrt{\sigma_2}$, on vérifie sans peine que la formule précédente implique

$$J_1 = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_2}}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right)\right) = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{j}}\right)(1 + O(R^{-1}))$$

où la seconde estimation découle de (2.14) avec $h = 2$ et du fait que $j \gg L$ implique $j \gg R$.

Le lemme 3 permet de majorer facilement J_2. On a

$$J_2 \ll \exp\{-c_1 c_2^2 j^{\frac{1}{3}}\} \ll j^{-\frac{1}{2}} R^{-1}.$$

En reportant ces estimations dans (2.16) et en remarquant que

$$w(j)=(\sqrt{(2\pi j)})(1+O(j^{-1}))=(\sqrt{(2\pi j)})(1+O(R^{-1}))$$

lorsque $j \gg L$, on voit que (1.12) est encore vérifiée quand $\rho > \frac{1}{3}$. Cela achève la démonstration du théorème 1.

3. *Démonstration des corollaires*

Le Corollaire 1 est une conséquence simple du théorème 1 et des lemmes 1 et 2. En effet, les formules (2.3) et (2.10) impliquent respectivement

$$F(\rho, p)=\exp \varphi(\rho)=\exp\{j+O(jR^{-1})\}$$

et

$$\rho^{-j}w(j)^{-1}=(1/j!)(M/e)^j\exp\{O(jR^{-1})\}.$$

Compte tenu de (1.12), cela fournit la première conclusion du corollaire 1, i.e. (1.13). Pour établir (1.14) remarquons d'abord que nous pouvons supposer $R \geq R_0(\varepsilon)$ où $R_0(\varepsilon)$ est arbitrairement grand. En effet dans le cas contraire il découle de la majoration $j \leq p^{1-\varepsilon}$ que $p \ll_\varepsilon 1$ et (1.14) équivaut à (1.13) sous la forme triviale $s_j(p) \ll_\varepsilon 1$. Cela étant, posons $y := j/M$ de sorte que $\rho = y(1+\delta)$ avec $\delta \ll R^{-1}$, et nous pouvons en particulier supposer que $|\delta| \leq \frac{1}{4}$. Notant

$$H(r)=\log \varphi(r)-j\log r \quad (r>0)$$

on constate que $H'(\rho)=0$ par définition de ρ et l'on déduit de (2.13) que

$$H''(r)=\varphi''(r)+jr^{-2} \ll j\rho^{-2} \quad (|\rho/r-1| \leq \tfrac{1}{4}).$$

Cela implique

$$H(r)-H(\rho)=O(j\delta^2)=O(jR^{-2}) \quad (|\rho/r-1| \leq \tfrac{1}{4}) \tag{3.1}$$

d'où (1.14) en reportant dans (1.12) avec $r=y$.

Pour établir le Corollaire 2, nous pouvons manifestement supposer $k \geq 2$ et donc $j \geq 1$. Posons $\rho_1 = \rho(j+1, p)$, on déduit, de (1.12),

$$\frac{\lambda_{k+1}(p)}{\lambda_k(p)}=\frac{F(\rho_1, p)\rho_1^{-j-1}}{F(\rho, p)\rho^{-j}}e^{-1}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j(1+O(R^{-1})). \tag{3.2}$$

Lorsque p est fixé, nous pouvons considérer $\rho=\rho(j, p)$ comme fonction de j et étendre son domaine de définition à tout l'intervalle réel $[j, j+1]$. Le membre de gauche de (3.2) peut alors s'écrire sous la forme

$$\exp\left\{\int_j^{j+1} K'(m)\,dm-1+j\log(1+1/j)+O(R^{-1})\right\} \tag{3.3}$$

avec

$$K(m) := \log F(\rho(m, p), p)-m\log \rho(m, p).$$

On a alors

$$\begin{aligned} K'(m) &= \rho'(m, p)\left\{\frac{F'(\rho(m, p), p)}{F(\rho(m, p), p)}-\frac{m}{\rho(m, p)}\right\}-\log \rho(m, p) \\ &= -\log \rho(m, p)=\log M-\log m+O(R^{-1}) \end{aligned}$$

d'après le lemme 1. Cela implique

$$\int_j^{j+1} K'(m)\,dm = \log M + O(R^{-1}) - (j+1)\log(j+1) + j\log j + 1$$
$$= \log(M/(j+1)) - j\log(1+1/j) + 1 + O(R^{-1}).$$

On obtient bien (1.15) en reportant dans (3.3).

Nous procédons de manière identique pour démontrer le Corollaire 3. Par symétrie, nous restreignons l'étude au cas $p<p'$. Lorsque $j\geq 1$ est fixé, nous définissons $\rho(x)=\rho(j,x)$ comme l'unique solution de l'equation

$$\frac{\rho}{F(\rho,x)}\frac{d}{d\rho}F(\rho,x) = \sum_{q<x}\frac{\rho}{q-1+\rho} = j$$

et nous posons

$$N(x) := \log F(\rho(x),x) - j\log\rho(x)$$
$$= \int_1^{x-} \log\Big(1+\frac{\rho(x)}{t-1}\Big)\,d\pi(t) - j\log\rho(x).$$

On vérifie facilement que

$$dN(x) = \log(1+\rho(x)/(x-1))\,d\pi(x)$$

de sorte que l'on peut écrire, grâce à (1.12),

$$\frac{p'\lambda_k(p')}{p\lambda_k(p)} = \exp\Big\{\sum_{p\leq q<p'}\log\Big(1+\frac{\rho(j,q)-1}{q}\Big) + O(R^{-1})\Big\}. \tag{3.4}$$

Lorsque $p\leq q<p'\leq p^{1+L/R}$, le lemme 1 implique

$$\rho(j,q) = y(1+O(R^{-1}))$$

où $y=j/M$ avec $M=M(j,p)$ indépendant de q. La somme en q dans (3.4) vaut donc

$$\sum_{p\leq q<p'}\Big\{\frac{y-1}{q} + O\Big(\frac{y}{qR}+\frac{y^2}{q^2}\Big)\Big\}$$
$$= (y-1)(\log(1+\eta) + O(e^{-\sqrt{\log p}}))$$
$$+ O(yR^{-1}(\eta + e^{-\sqrt{\log p}}) + y^2/p\log p)$$
$$= (y-1)\log(1+\eta) + (ye^{-\sqrt{\log p}} + \eta yR^{-1} + R^{-1}).$$

Cela implique bien (1.16) et achève la démonstration du Corollaire 3.

Prouvons maintenant le Corollaire 4. Puisque $R\geq L\asymp M$, il découle de (1.15) que l'on a

$$\lambda_{k+1}(p)/\lambda_k(p) = (M+O(1))/k \quad (p\geq k^2). \tag{3.5}$$

Comme $M=\log_2 p + O(\log_2 k)$, on en déduit que le maximum de $\lambda_k(p)$ pour $1\leq k\leq\sqrt{p}$ est atteint lorsque $k\sim\log_2 p$. Mais pour ces valeurs de k on a $M=\log_2 p+O(1)$, ce qui implique en reportant dans (3.5) que le maximum est atteint lorsque $k=\log_2 p+O(1)$. Dans cette circonstance on a $\rho\sim 1$ d'après le lemme 1, et en appliquant (3.1) avec $r=1$, on obtient

$$F(\rho, p)\rho^{-j} = F(1, p)(1 + O(1/\log_2 p)).$$

En reportant dans (1.12) et en évaluant $w(j)$ par la formule de Stirling, il suit

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant \sqrt{p}} \lambda_k(p) = \frac{1 + O(1/\log_2 p)}{p\sqrt{(2\pi \log_2 p)}} \quad (p \to \infty). \tag{3.6}$$

Pour achever la démonstration du Corollaire 4, il reste à montrer que $\lambda_k(p)$ est strictement inférieur au membre de gauche de (3.6) lorsque $k > \sqrt{p}$, $p \to \infty$. Il est largement suffisant pour cela d'utiliser la classique majoration combinatoire

$$s_j(p) \leqslant \frac{1}{j!}\Big(\sum_{q<p} \sum_{\nu=1} q^{-\nu}\Big)^j \leqslant \frac{1}{j!}(\log_2 p + c_3)^j \tag{3.7}$$

qui est valable pour tous $j \geqslant 1$, $p \geqslant 2$. Cela implique

$$\max_{k > \sqrt{p}} \lambda_k(p) < \exp\{-(1+o(1))(\sqrt{p})\log\sqrt{p}\} \quad (p \to \infty)$$

et fournit la conclusion attendue.

Démontrons le Corollaire 5. Notant toujours $y = (k-1)/M = j/M$, nous pouvons écrire, d'après le corollaire 3, pour $p \geqslant k^2$, $p' = p^{1+\eta}$, $|\eta| \leqslant L/R$,

$$\frac{\lambda_k(p')}{\lambda_k(p)} = \exp\{\eta(A + O(|\eta(y-1)| + yR^{-1})) + O(ye^{-\sqrt{\log p}} + R^{-1})\} \tag{3.8}$$

avec

$$A = y - 1 - \log p.$$

Si $y \leqslant R$, alors $A \sim -\log p$ et l'on a

$$|\eta(y-1)| + yR^{-1} \ll L = o(A),$$
$$ye^{-\sqrt{\log p}} + R^{-1} \ll R^{-1} = o(AR^{-1}),$$

de sorte que l'expression entre accolades dans (3.8) est $\geqslant \frac{1}{2}\eta A$ lorsque $\eta \sim -L/R$. Le théorème des nombres premiers permettant d'affirmer l'existence d'un p' tel que $\eta \sim -L/R$, on obtient donc $\lambda_k(p') > \lambda_k(p)$ et l'on en déduit que $\max_{p \geqslant k^2} \lambda_k(p)$ est nécessairement atteint pour des valeurs de p telles que

$$y \geqslant R. \tag{3.9}$$

Sous cette hypothèse, le membre de droite de (3.8) vaut, lorsque $|\eta| \asymp R^{-1}$,

$$\exp\{\eta(A + O(yR^{-1}))\}.$$

En effet on a alors la majoration

$$ye^{-\sqrt{\log p}} + R^{-1} \ll |\eta|\,(yR^{-1} + |\eta|^{-1}R^{-1}) \asymp |\eta|\,yR^{-1}.$$

Nous pouvons donc affirmer l'existence d'une constante absolue c_4 telle que l'on ait $\lambda_k(p') > \lambda_k(p)$ pour le choix $\eta \asymp (\operatorname{sgn} A)R^{-1}$ et sous la condition $|A| > c_4 yR^{-1}$. Cela montre que le maximum de $\lambda_k(p)$ sur $[k^2, +\infty[$ est réalisé lorsque $|A| \ll yR^{-1}$, c'est-à-dire

$$1 + \log p = y(1 + O(R^{-1})). \tag{3.10}$$

Il est facile de constater que cette relation implique

(3.11) $$\log p \sim k/\log k \quad (k \to \infty)$$

d'où

(3.12) $$M \sim \log k \quad (k \to \infty).$$

En reportant dans (1.13), on obtient que (3.11) et (3.12) impliquent

$$\lambda_k(p) = \frac{1}{(k-1)!} \exp\{(1+o(1))k \log_2 k\}.$$

Comme on a, par (3.7),

$$\lambda_k(p) \leqq \frac{1}{(k-1)!} \exp\{(1+o(1))k \log_3 k\} \quad (p \leqslant k^2),$$

on en déduit que le maximum global de $\lambda_k(p)$ est réalisé lorsque $p > k^2$, et par conséquent lorsque p satisfait (3.10).

Maintenant il est clair que (3.10) implique $j \sim L \log p$ et donc, par (1.9),

(3.13) $$M = \log_2 p - \log_3 p + O(1/\log_2 p).$$

En reportant dans (3.10), il suit

(3.14) $$\log p \cdot \{\log_2 p - \log_3 p\} = k(1 + O(1/(\log k)^2)).$$

Grâce à (3.11), nous obtenons de plus

$$\log_2 p - \log_3 p = \log k - 2 \log_2 k + O(1)$$

d'où en reportant dans (3.14),

(3.15) $$\log p = \frac{k}{\log k}\left(1 + \frac{2 \log_2 k + O(1)}{\log k}\right).$$

Une seconde itération fournit alors (1.20).

Pour obtenir (1.19), nous évaluons M en utilisant (3.15) et (3.13) et nous estimons $\lambda_k(p)$ par (1.13) et (1.20). Nous omettons les détails.

4. *Démonstration du théorème* 2

Ainsi que nous l'avons annoncé dans l'introduction nous supposons ici $d \geqslant 5000$.

Nous utiliserons l'estimation de Rosser et Schoenfeld [**10**]

(4.1) $$\frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{2 \log x}\right) < \pi(x) < \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{3}{2 \log x}\right) \quad (x \geqslant 52).$$

Le lecteur vérifiera aisément que cela implique

(4.2) $$\sum_{\sqrt{d} < p \leqslant d} p^{-1} > \tfrac{3}{5} \quad (d \geqslant 5000)$$

et aussi

(4.3) $$\pi(d) - \pi(\tfrac{1}{2}d) - 1 > d/3 \log d \quad (d \geqslant 5000).$$

Posons, pour $n, d \geqslant 1$,

$$\tau(n, d) := \sum_{\substack{m \mid n \\ m \leqslant d}} 1. \tag{4.4}$$

Alors $\Lambda_k(d)$ est la densité de la suite des entiers n tels que $n \equiv 0 \pmod d$ et $\tau(n, d) = k$. L'implication (a)$\Rightarrow$(b) du théorème découle donc immédiatement de l'encadrement

$$\tau(d) \leqslant \tau(n, d) \leqslant d \qquad (n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)).$$

Pour établir la réciproque nous allons prouver que, pour chaque entier k tel que

$$\tau(d) \leqslant k \leqslant d, \tag{4.5}$$

il existe au moins un n tel que $d \mid n$ et $\tau(n, d) = k$. Comme cette propriété n'est pas affectée lorsqu'on multiplie n par un entier dont tous les facteurs premiers sont $>d$, cela suffit pleinement à montrer que $\Lambda_k(d) > 0$. Posons

$$g = \prod_{\frac{1}{2}d < p < d} p.$$

L'idée essentielle de la démonstration consiste à remarquer que si $(n, g) = 1$ et $t \mid g$, alors

$$\tau(nt, d) = \tau(n, d) + \omega(t). \tag{4.6}$$

Cela découle trivialement du fait que tout produit d'un facteur premier de t par un entier >1 dépasse d. Posant

$$h = h(d) := \omega(g) > d/3 \log d$$

(où l'inégalité provient de (4.3)), on déduit donc de (4.6) que tout entier k appartenant à

$$J(d) := \bigcup_{(n,g)=1} [\tau(n, d), \tau(n, d) + h]$$

est tel que $\Lambda_k(d) > 0$.

Dans une première étape, nous montrons que l'on peut disposer du cas $k > \frac{4}{7}d$. Posons $\alpha_p := [\log d/\log p]$ et considérons l'entier N défini par

$$N := \prod_{p \leqslant \sqrt{d}} p^{\alpha_p}.$$

Si m est compté dans $\tau(dN, d)$ alors on a

$$P(m) \leqslant \sqrt{d} \quad \text{ou } P(m) = P(d).$$

La seconde éventualité n'est à considérer que si $P(d) > \sqrt{d}$ et il suit que

$$\begin{aligned}\tau(dN, d) &\leqslant (\sqrt{d}) + d - \sum_{\sqrt{d} < p \leqslant d} [d/p] \\ &\leqslant (\sqrt{d}) + d\Big\{1 - \sum_{\sqrt{d} < p \leqslant d} 1/p\Big\} + \pi(d).\end{aligned}$$

Grâce à (4.1) et (4.2), on voit que cette majoration n'excède pas $\frac{4}{7}d$ lorsque

$d \geqslant 5000$. Comme d'autre part on a trivialement

$$\tau\Big(d \prod_{p \leqslant d} p^{\alpha_p}, d\Big) = d,$$

il découle de ce qui précède qu'il existe un entier n de la forme

$$n = d \prod_{p<q} p^{\alpha_p}, \quad q > \sqrt{d},$$

tel que

$$\tau(n, d) < k \leqslant \tau(nq, d) \leqslant \tau(n, d) + [d/q].$$

Si $q > \frac{1}{2}d$, la seconde inégalité est une égalité; sinon $(n, g) = 1$ et $k \in J(d)$. Dans les deux cas, on a bien $\Lambda_k(d) > 0$.

Dans la suite nous supposons donc $k \leqslant 4d/7$. Considérons d'abord le cas où $k \leqslant d/\log d$. Pour l entier, $l > \sqrt{d}$, posons $M_l := \prod_{\sqrt{d}<p\leqslant l} p$. Alors

$$\tau(dM_d, d) \geqslant \pi(d) - \pi(\sqrt{d}) > d/\log d,$$

où la seconde inégalité découle de (4.1). Si q désigne le plus petit nombre premier de $]\sqrt{d}, d]$ tel que $\tau(dM_q, d) > k$, on a donc, pour $n = dM_q/q$,

$$\tau(n, d) \leqslant k \leqslant \tau(nq, d) \leqslant \tau(n, d) + [d/q].$$

On en conclut comme précédemment que $\Lambda_k(d) > 0$.

Nous pouvons maintenant nous placer dans le cas où

$$d/\log d < k \leqslant \tfrac{4}{7}d.$$

Désignons par $\{p_i\colon i = 1, 2, \ldots\}$ la suite croissante des nombres premiers et posons

$$N_0 = 1, \quad N_j := \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \\ p_i \nmid d}} p_i \quad (j \geqslant 1).$$

Pour $d \geqslant 5000$, on a

$$\begin{aligned}\tau(dN_d, d) &\geqslant \sum_{m \leqslant d} \mu(m)^2 \\ &= \sum_{t \leqslant \sqrt{d}} \mu(t)[d/t^2] \\ &\geqslant (6/\pi^2)d - [\sqrt{d}] - d/[\sqrt{d}] > \tfrac{4}{7}d.\end{aligned}$$

Cela implique l'existence d'un entier $l \geqslant 1$ tel que

$$\tau(dN_{l-1}, d) \leqslant k < \tau(dN_l, d) \leqslant \tau(dN_{l-1}, d) + [d/p_l]. \tag{4.7}$$

Si $p_l > \frac{1}{2}d$, la première inégalité est une égalité. Si $3 \log d < p_l \leqslant \frac{1}{2}d$, k appartient à $J(d)$. Dans les deux cas, on a encore $\Lambda_k(d) > 0$. Si $\log d < p_l \leqslant 3 \log d$, on a

$$\left[\frac{d}{p_l}\right] < \frac{d}{\log d} < \pi(d) - \pi(\sqrt{d}) - 1 \leqslant \tau(dN_{l-1}M_d, d) - \tau(dN_{l-1}, d)$$

car tous les nombres premiers de $]\sqrt{d}, d]$, sauf éventuellement un, sont comptés dans $\tau(dN_{l-1}M_d, d)$ et pas dans $\tau(dN_{l-1}, d)$. En reportant dans (4.7) on obtient l'existence d'un nombre premier $q > \sqrt{d}$ tel que l'on ait, pour $n = dN_{l-1}M_q/q$,

$$\tau(n, d) \leq k < \tau(nq, d) \leq \tau(n, d) + [d/q].$$

On en déduit comme précédemment que $\Lambda_k(d) > 0$.

Il reste à examiner le cas où $p_l \leq \log d$. Nous allons montrer que l'on a en fait dans cette circonstance

$$\tau(dN_l) < d/\log d,$$

ce qui contredit (4.7). Pour $d \geq e^{11}$, nous employons la majoration de Nicolas et Robin [8] pour la fonction de diviseurs. Il vient

$$\tau(dN_l) \leq 2^l \tau(d) \leq 2^{\pi(\log d) + 1{,}54 \log d/\log_2 d} < d/\log d$$

où nous avons utilisé, pour la dernière inégalité, la majoration (4.1) pour $d \geq e^{52}$, et l'estimation exacte

$$\pi(\log d) = j \quad (e^{p_j} \leq d < e^{p_{j+1}},\ 11 \leq p_j \leq 47)$$

pour $e^{11} \leq d < e^{52}$. Lorsque $5000 \leq d < e^{11}$, on a $\pi(\log d) = 4$ mais $\omega(N_l) \leq 3$ sauf si d est premier à $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Dans cette dernière circonstance, on a

$$\tau(d) \leq 2^{\log d/\log 11} < 2^{-4}(d/\log d) \quad (d \geq 5000)$$

puisque le plus petit facteur premier de d est ≥ 11. Dans le cas contraire, on a

$$\tau(dN_l) \leq e^{3 + 1{,}54 \log d/\log_2 d} < d/\log d \quad (d \geq 5000).$$

Cela achève la démonstration du théorème 2.

5. *Démonstration du théorème* 3

Le crible d'Eratosthène permet d'écrire la formule suivante pour $\Lambda_k(d)$, qui est l'analogue de (1.5) pour $\lambda_k(p)$,

$$\Lambda_k(d) = \frac{1}{d} \prod_{p \leq d} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{P(m) \leq d \\ \tau(dm, d) = k}} \frac{1}{m}. \tag{5.1}$$

D'après le théorème 2, nous savons que la somme en m est non vide si et seulement si $\tau(d) \leq k \leq d$.

La borne inférieure de (1.21) découle immédiatement de (5.1): désignant par $S_k(d)$ la somme en m, on voit que $S_k(d) = 1$ $(k = \tau(d))$. Le résultat annoncé provient alors de la formule de Mertens.

Montrons maintenant la borne supérieure de (1.21). Pour chaque entier m apparaissant dans $S_k(d)$ nous considérons la décomposition canonique $m = ab$ $((a, d) = 1,\ p \mid b \Rightarrow p \mid d)$ et nous notons $m(z)$ le plus grand diviseur de m constitué exclusivement de facteurs premiers n'excédant pas z. Nous choisirons dans toute la suite

$$z = \exp\{\log d/\log_2 d\}.$$

Avec ces notations, désignons par T_j $(1 \leq j \leq 4)$ la sous-somme de $S_k(d)$ correspondant aux conditions supplémentaires:

(T_1) $\tau(b) \geq (\log_2 d)^2$;
(T_2) $\tau(m) 2^{-\omega(m)} \geq \log_2 d$;
(T_3) $m(z) \geq \sqrt{d}$;
(T_4) $\omega(m/m(z)) \geq 3 \log_3 d$.

Nous allons prouver que l'on a

$$T_j \ll \log d/\sqrt{\log_2 d} \quad (1 \leqslant j \leqslant 4). \tag{5.2}$$

Admettons ces estimations pour le moment. On peut alors écrire

$$S_k(d) = S_k^*(d) + O(\log d/\sqrt{\log_2 d}) \tag{5.3}$$

où $S_k^*(d)$ est la sous-somme de $S_k(d)$ restreinte aux entiers m ne satisfaisant aucune des conditions (T_j) $(1 \leqslant j \leqslant 4)$. Pour ces entiers m on a d'une part

$$k = \tau(dm, d) \leqslant \tau(d)\tau(m) \leqslant \tau(d)2^{\omega(m)} \log_2 d$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} k = \tau(dm, d) &\geqslant \tau(da(z), d) \\ &\geqslant \sum_{s \mid a(z)} \sum_{\substack{t \mid d \\ t \leqslant \sqrt{d}}} 1 \\ &\geqslant \tau(a(z)) \cdot \tfrac{1}{2}\tau(d) \\ &\geqslant 2^{\omega(a(z))-1}\tau(d) \\ &\geqslant 2^{\omega(m)-\omega(m/m(z))-1}\tau(b)^{-1}\tau(d) \\ &\geqslant 2^{\omega(m)-1}\tau(d)(\log_2 d)^{-2-3\log 2}. \end{aligned}$$

Il suit

$$\left|\omega(m) - \frac{1}{\log 2}\log(k/\tau(d))\right| \leqslant 6 \log_3 d \quad (d \to \infty)$$

et donc

$$S_k^*(d) \leqslant 6 \log_3 d \cdot \max_{j \geqslant 1} \sum_{\substack{P(m) \leqslant d \\ \omega(m) = j}} 1/m.$$

Le corollaire 4 au théorème 1 fournit donc

$$S_k^*(d) < \frac{6 \log_3 d}{\sqrt{(2\pi \log_2 d)}} \log d \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\log_2 d}\right)\right)$$

d'où l'on déduit l'estimation annoncée pour $\Lambda_k(d)$ en reportant dans (5.3) puis dans (5.1).

Il reste à établir (5.2). On a

$$\begin{aligned} T_1 &\leqslant \sum_a \frac{1}{a} \sum_b \frac{\tau(b)}{b} (\log_2 d)^{-2} \\ &\leqslant \prod_{\substack{p \leqslant d \\ p \nmid d}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \mid d} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)p^{-\nu} \cdot (\log_2 d)^{-2} \\ &\ll \log d \cdot (d/\varphi(d))(\log_2 d)^{-1} \\ &\ll \log d \cdot (\log_2 d)^{-1}. \end{aligned}$$

Semblablement, on peut écrire

$$\begin{aligned} T_2 &\leqslant \sum_{P(m) \leqslant d} \tau(m) 2^{-\omega(m)} m^{-1} (\log_2 d)^{-1} \\ &\leqslant \prod_{p \leqslant d} \left(1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \tfrac{1}{2}(\nu+1)p^{-\nu}\right)(\log_2 d)^{-1} \\ &\ll \log d \cdot (\log_2 d)^{-1}. \end{aligned}$$

Pour majorer T_3, nous utilisons la méthode de Rankin avec $\alpha := 2/\log z$. Il vient

$$\begin{aligned} T_3 &\leq \sum_{P(m)\leq d} \left(\frac{m(z)}{\sqrt{d}}\right)^{\alpha} \frac{1}{m} \\ &\leq d^{-\frac{1}{2}\alpha} \prod_{p\leq z} (1-p^{\alpha-1})^{-1} \prod_{z<p\leq d} (1-p^{-1})^{-1} \\ &\ll \exp\left\{-\frac{\log d}{\log z} + \sum_{p\leq z} \frac{1+O(\log p/\log z)}{p} + \sum_{z<p\leq d} \frac{1}{p}\right\} \\ &\ll \log d \cdot (\log_2 d)^{-1}. \end{aligned}$$

Enfin nous avons

$$\begin{aligned} T_4 &\leq \sum_{P(m)\leq d} \frac{2^{\omega(m/m(z))}}{m} (\log_2 d)^{-3\log 2} \\ &\ll \exp\left\{\sum_{p\leq z} \frac{1}{p} + \sum_{z<p\leq d} \frac{2}{p} - \log 8 \cdot \log_3 d\right\} \\ &\ll (\log_2 d)^{-(\log 8 - 1)} \log d. \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration de l'encadrement (1.21). Pour prouver (1.22) nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 4. *On a uniformément pour $\xi \geq 0$, $2^{\xi} \leq d$,*

$$\sum_{P(m)\leq d} \frac{\tau(m)^{\xi}}{m} \ll (1+\log d)^{2^{\xi}}. \tag{5.4}$$

Démonstration. Le membre de gauche de (5.4) ne dépasse pas $\prod_{p\leq d} A_p$ avec

$$A_p := \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{\xi} p^{-\nu} \leq p\left[\frac{d^h}{dz^h}\left(\frac{1}{e^z-1}\right)\right]_{z=\log p}$$

où nous avons posé $h = [\xi]+1$. L'inégalité de Cauchy appliquée pour un cercle de rayon $\frac{1}{2}\log p$ fournit la majoration

$$A_p \leq \frac{p}{2\pi} \frac{h!}{(\sqrt{p})-1} \left(\frac{2}{\log p}\right)^h \leq (\sqrt{p})h!\left(\frac{2}{\log p}\right)^h.$$

D'où

$$\begin{aligned} \prod_{p\leq 2^h} A_p &\leq \exp\left\{\tfrac{1}{2} \sum_{p\leq 2^h} \log p + \pi(2^h)\log(h!) - h \sum_{p\leq 2^h} \log(\tfrac{1}{2}\log p)\right\} \\ &\leq \exp\{C2^h + O(2^h h^{-1} \log h)\} \end{aligned} \tag{5.5}$$

avec

$$C = \frac{3}{2} - \left(\frac{1+\log\log 2}{\log 2}\right) = 0{,}58607\ldots$$

où la seconde inégalité découle facilement du théorème des nombres premiers et de la formule de Stirling. Lorsque $p > 2^h$, on a

$$A_p \leq \exp\{2^{\xi}/p + O(3^h/p^2)\}$$

d'oú

(5.6)
$$\prod_{2^h<p\leqslant d} A_p \leqslant \exp\{2^\xi \log_2 d - 2^\xi \log h + O(2^h)\}.$$

Le résultat souhaité découle de (5.5) et (5.6).

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la majoration de (1.22). Supposons que $X > e\log 2$ est fixé et que $k \geqslant \tau(d)(\log d)^X$. On a alors, pour tout $\xi \geqslant 0$,

$$S_k(d) \leqslant \sum_{\substack{P(m)\leqslant d\\ \tau(m)\tau(d)\geqslant k}} \frac{1}{m} \leqslant \sum_{P(m)\leqslant d} \frac{\tau(m)^\xi(\log d)^{-X\xi}}{m} \ll (1+\log d)^{2^\xi - X\xi}$$

grâce à (5.4). Pour le choix optimal $2^\xi = X/\log 2$ l'exposant de $1+\log d$ vaut

$$\frac{X}{\log 2}\left(1-\log\left(\frac{X}{\log 2}\right)\right) < 0.$$

En reportant dans (5.1) on voit que dans cette circonstance

$$\Lambda_k(d) = o\left(\frac{1}{d\log d}\right)$$

de sorte que k ne réalise sûrement pas le maximum de $\Lambda_k(d)$. Cela achève la démonstration du théorème 3.

6. *Démonstration du théorème* 4

Dans un premier temps, établissons l'encadrement (1.24). Pour la minoration, considérons à k fixé, l'entier $N = \prod_{p\leqslant y} p$ où $y = y(k)$ est le plus petit entier tel que $\tau(N) = 2^{\pi(y)} \geqslant k$. On a alors par le théorème des nombres premiers

$$y = k_1(\log k_1 + \log_2 k_1 + O(1))$$

avec $k_1 := \log k/\log 2$. De plus la même formule asymptotique est valable pour $\log N$.

Pour le choix $d = d_k(N)$ on a donc

$$\Lambda_k(d) \geqslant \varphi(N)/N^2 = \exp\{-k_1(\log k_1 + \log_2 k_1 + O(1))\} \geqslant K^{-1}k^{-(\log_3 k + O(1))/\log 2}.$$

Cela établit la borne inférieure de (1.24).

Pour majorer $\max_d \Lambda_k(d)$ nous pouvons donc nous restreindre aux entiers d tels que

(6.1)
$$d \leqslant K\,k^{(\log_3 k + O(1))/\log 2}.$$

En effet la majoration triviale $\Lambda_k(d) \leqslant 1/d$ et la minoration précédemment prouvée impliquent que le maximum est nécessairement atteint lorsque d satisfait (6.1). Maintenant, observons que tout entier n tel que $d_k(n) = d$ est tel que $\tau(n(d)) \geqslant k$ avec $n(d) = \prod_{p^\nu \| n,\, p\leqslant d} p$. Cela implique, pour tout $\xi \geqslant 0$,

(6.2)
$$\Lambda_k(d) \leqslant \limsup_{x\to\infty} k^{-\xi}x^{-1}\sum_{n\leqslant x} \tau(n(d))^\xi.$$

Or, lorsque d et ξ sont fixés, la fonction $n \to \tau(n(d))^\xi$ est multiplicative. On a par la formule d'inversion de Möbius

$$\tau(n(d))^{\xi}=\sum_{m\mid n} g(m)$$

où g est la fonction multiplicative $\geqslant 0$ définie par

$$g(p^{\nu})=\begin{cases}(\nu+1)^{\xi}-\nu^{\xi} & (p\leqslant d,\ \nu\geqslant 1),\\ 0 & (p>d,\ \nu\geqslant 1).\end{cases}$$

On déduit donc, de (6.2),

$$\Lambda_k(d)\leqslant k^{-\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g(m)}{m}=k^{-\xi}\prod_{p\leqslant d}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{P(m)\leqslant d}\frac{\tau(m)^{\xi}}{m}.$$

Par le lemme 4, il suit

$$\Lambda_k(d)\ll(1+\log d)^{2^{\xi}-1}k^{-\xi}\quad(2^{\xi}\leqslant d).$$

Lorsque $k\leqslant(\log d)^{\log 2}$, on peut opérer le choix optimal

$$\xi=\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{\log k}{\log 2\cdot\log_2 d}\right).$$

La condition $2^{\xi}\leqslant d$ est alors vérifiée puisque $k\leqslant d$. Il vient

$$\Lambda_k(d)\leqslant K^{-1}\exp\left\{\frac{\log k}{\log 2}(1+\log_2 2+\log_3 d)-\log_2 d\right\}.$$

En particulier, lorsque d satisfait (6.1), on obtient

$$\Lambda_k(d)\leqslant K^{-1}k^{(\log_3 k+O(1))/\log 2},$$

c'est-à-dire la majoration souhaitée.

Il nous reste à montrer (1.25). La borne supérieure est impliquée par (6.1). Pour établir la borne inférieure, nous aurons recours au résultat classique de de Bruijn [**1**, **2**] suivant.

Lemme 5 (de Bruijn). *Posons, pour* $x\geqslant y\geqslant 2$,

$$\Psi(x,y)=\operatorname{card}\{n\leqslant x:\ P(n)\leqslant y\}.$$

Alors on a uniformément, lorsque $y\to\infty$,

$$\log\Psi(x,y)\sim\frac{\log x}{\log y}\int_0^1\log\left(1+\frac{y}{w\log x}\right)dw. \tag{6.3}$$

Considérons maintenant un nombre entier d satisfaisant à

$$d\leqslant K^{\alpha(1-\varepsilon)} \tag{6.4}$$

où α est défini par l'équation (1.26), et ε est un réel positif arbitrairement petit. Pour chaque entier n tel que $\omega(n,d):=\sum_{p\mid n,\,p\geqslant d}1=r$ on a

$$\tau(n,d)\leqslant\Psi(d,p_r) \tag{6.5}$$

où p_r désigne toujours le r-ième nombre premier. Si la décomposition canonique de n est $n=\prod_{j=1}^{r}q_j^{\alpha_j}$, on peut en effet associer injectivement à chaque diviseur de n, $m=\prod_{j=1}^{r}q_j^{\beta_j}$, le nombre $m'=\prod_{j=1}^{r}p_j^{\beta_j}$ qui est compté dans $\Psi(d,p_r)$.

Supposons alors que $r \leqslant (1+\frac{1}{2}\eta)(\log k/\log 2)$, avec $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$. Le théorème des nombres premiers implique

$$p_r < (1+\eta)\log K \quad (k \to \infty)$$

et l'on déduit de (6.5) et (6.3) que

$$\begin{aligned}\tau(n,d) &\leqslant \Psi(K^{\alpha(1-\varepsilon)}, (1+\eta)\log K)\\ &= \exp\left\{(1+o(1))\frac{\alpha(1-\varepsilon)\log k}{\log 2}\int_0^1 \log\left(1+\frac{(1+\eta)}{\alpha(1-\varepsilon)w}\right)dw\right\}\\ &= k^{\lambda+o(1)}\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\lambda = \frac{1+\eta}{\log 2}\cdot\int_0^{\alpha(1-\varepsilon)/(1+\eta)} \log\left(1+\frac{1}{v}\right)dv.$$

Puisque l'équation (1.26) définissant α peut encore s'écrire

$$\int_0^{\alpha}\log\left(1+\frac{1}{v}\right)dv = \log 2$$

on voit que $\lambda < 1$ dès que $\eta(\varepsilon)$ est assez petit.

Il découle de ce qui précède que l'équation $\tau(n,d) = k$ implique, sous l'hypothèse (6.4),

$$r = \omega(n,d) > (1+\tfrac{1}{2}\eta)\frac{\log k}{\log 2} =: T. \tag{6.6}$$

La densité des entiers n satisfaisant à cette inégalité ne dépasse pas

$$\prod_{p\leqslant d}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{r>T}\frac{1}{r!}\left(\sum_{p\leqslant d}\frac{1}{p-1}\right)^r \ll \frac{1}{\log d}\frac{(\log_2 d + c_5)^T}{T!} \ll K^{-1-\frac{1}{3}\eta} \quad (k\to\infty).$$

Cela montre que $\Lambda_k(d)$ n'est pas maximal lorsque d satisfait (6.4) et complète ainsi la preuve du théorème 4.

Remarque. Sauf à connaître un développement asymptotique relativement précis de $\max_d \Lambda_k(d)$, la valeur de l'exposant α dans (1.25) ne pourra être améliorée au delà de $\frac{1}{2}$. En effet, pour le choix $N = \prod_{p\leqslant y} p$ si y est le plus petit entier tel que $\tau(N) = 2^{\pi(y)} \geqslant 2k$ et si $d = d_k(N)$, on a trivialement

$$d \leqslant \sqrt{N} = K^{\frac{1}{2}+o(1)}$$

et

$$\Lambda_k(d) \geqslant \varphi(N)/N^2 = K^{-1+o(1)}.$$

Bibliographie

1. N. G. de Bruijn, 'On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $>y$', *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 54 (1951) 25–32.
2. N. G. de Bruijn, 'On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $>y$, II', *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 69 (1966) 239–247; *Indag. Math.* 28 (1966) 239–247.
3. P. Erdös, 'Some unconventional problems in number theory', *Astérisque* 61 (1979) 73–82.
4. R. R. Hall et G. Tenenbaum, *Divisors* (Cambridge University Press, 1988).
5. D. Hensley, 'The distribution of round numbers', *Proc. London Math. Soc.* (3) 54 (1987) 412–444.
6. A. Hildebrand et G. Tenenbaum, 'On integers free of large prime factors', *Trans. Amer. Math. Soc.* 296 (1986) 265–290.
7. A. Hildebrand et G. Tenenbaum, 'On the number of prime factors of an integer', *Duke Math. J.* 56 (1988) 471–501.

8. J.-L. NICOLAS et G. ROBIN, 'Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de n', *Bull. Canad. Math.* 26 (1983) 485–492.
9. C. POMERANCE, 'On the distribution of round numbers', *Number theory, Proceedings Ootacamund, India 1984* (ed. K. Alladi), Lecture Notes in Mathematics 1122 (Springer, Berlin, 1986), pp. 173–200.
10. J. B. ROSSER et L. SCHOENFELD, 'Approximate formulas for some functions of prime numbers', *Illinois J. Math.* 6 (1962) 64–94.
11. A. SELBERG, 'Note on a paper by L. G. Sathe', *J. Indian Math. Soc.* 18 (1954) 83–87.
12. G. TENENBAUM, 'Lois de répartition des diviseurs, 2', *Acta Arith.* 38 (1980) 1–36.
13. G. TENENBAUM, 'La méthode du col en théorie analytique des nombres', Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1985–86, *Prog. Math.* 75 (1988) 411–441.

MTA Matematikai Kutató Intézete
Reáltanoda utca 13–15
P.O.B. 127
H-1364
Hungary

Département de Mathématiques
Université de Nancy I
B.P. 239
54506 *Vandœuvre-lès-Nancy Cedex*
France