Reprinted from JOURNAL OF NUMBER THEORY
All Rights Reserved by Academic Press, New York and London

Vol. 31, No. 3, March 1989
Printed in Belgium

Sur les fonctions arithmétiques liées aux diviseurs consécutifs

P. ERDÖS

MTA-MKI, Budapest, Reáltanoda u.13–15, H-1053 Hongrie

ET

G. TENENBAUM

Université de Nancy I, Département de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre Cedex, France

Communicated by R. L. Graham

Received December 10, 1987

1. INTRODUCTION

Les questions arithmétiques mêlant les structures additive et multiplicative des entiers sont en général difficiles—les problèmes de Waring et de Goldbach sont deux exemples parmi d'autres d'une telle situation.

Dans le cadre de l'étude des diviseurs d'un entier, on peut décrire ce phénomène comme la traduction d'un "conflit" entre les deux structures d'ordre naturelles dont on peut munir l'ensemble des diviseurs de n. La structure d'*ordre additif* est la trace de l'ordre de $\mathbb{Z}$. La structure d'*ordre multiplicatif* est induite par l'ordre lexicographique: si la décomposition canonique de n est $n=\prod_{1\leqslant i\leqslant k} p_i^{\alpha_i}$, les diviseurs sont les entiers de la forme $d=\prod_{1\leqslant i\leqslant k} p_i^{\beta_i}$, avec $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$, et l'on peut les ranger en associant à chaque d le "mot" $\beta_k\beta_{k-1}\cdots\beta_1$.

Ces définitions ont été introduites dans le récent livre de Hall et Tenenbaum [6], qui est dévolu à la description des principales méthodes disponibles pour aborder ce type de problèmes. On peut aussi envisager une interprétation probabiliste: si D_n est la variable aléatoire qui prend les valeurs $\log d$, lorsque d parcourt les diviseurs de n, avec équiprobabilité $1/\tau(n)$, on a la décomposition canonique

$$D_n=\sum_{p^\nu\,\|\,n} D_{p^\nu}$$

où les D_{p^ν} sont indépendantes. La répartition de chaque D_{p^ν} est triviale, celle de D_n est souvent inaccessible.

0022-314X/89 $3.00

Dans ce contexte, une classe de problèmes naturels, mais délicats, est constituée par les questions posées en termes de *diviseurs consécutifs*. Plus précisément, si nous désignons par

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_\tau = n \tag{1.1}$$

la suite ordonnée des diviseurs de n, il s'agit d'étudier des propriétés faisant intervenir explicitement les rapports entre d_i et d_{i+1} $(1 \leqslant i < \tau(n))$. La conjecture d'Erdös, récemment résolue par Maier et Tenenbaum [9], selon laquelle

$$E(n) := \min\{d_{i+1}/d_i : 1 \leqslant i \leqslant \tau(n)\} \to 1 \qquad \text{p.p.}$$

(où, ici et dans la suite, la mention p.p.—presque partout—indique que la relation ainsi désignée a lieu sur une suite de densité unité), est un exemple d'une telle situation.

Dans cet article, nous nous proposons de poursuivre l'étude spécifique, abordée dans [3–5], des fonctions arithmétiques liées aux diviseurs consécutifs. Une de nos motivations initiales est la fonction apparemment inoffensive

$$f(n) := \operatorname{card}\{i \in [1, \tau(n)[: (d_i, d_{i+1}) = 1\}.$$

Alors que la fonction "duale"

$$g(n) := \operatorname{card}\{i \in [1, \tau(n)[: d_i \mid d_{i+1}\}$$

fait l'objet de résultats relativement satisfaisants quant à son comportement normal ou moyen—cf. [4, 5, 11]—les propriétés de $f(n)$ demeurent encore bien mystérieuses.

L'énoncé de notre premier résultat dépend d'une suite de constantes numériques $B_1 = 3 \cdot 2^{-5/3} < B_2 < \cdots < B_\nu < \cdots < 1$, dont la définition précise est donnée à la section 2. Nous nous contentons de mentionner ici les deux propriétés suivantes (démontrées au lemme 2.3):

(a) $B_\nu < \exp\left\{\dfrac{1}{5(\nu+1)^2}\right\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$

(b) $\log B_\nu \sim -\dfrac{1}{2\nu^2} \qquad (\nu \to \infty).$

Les premières valeurs numériques sont rassemblées dans le tableau suivant.

ν	1	2	3	4	5
B_ν	0.94 494	0.97 398	0,98 449	0,98 959	0,99 248

Comme c'est l'usage, nous désignons respectivement par $\Omega(n)$ et $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers de n comptés avec, ou sans, leur ordre de multiplicité. Nous introduisons également la famille des fonctions additives ω_ν, dépendant du paramètre entier $\nu \geqslant 1$, et définies par

$$\omega_\nu(n) := \operatorname{card}\{p : p \mid n,\ p^{\nu+1} \nmid n\}. \tag{1.2}$$

Ici, comme dans tout l'article, la letrre p désigne exclusivement un nombre premier.

THÉORÈME 1. *Pour tous n, $\nu \geqslant 1$, on a*

$$f(n) \leqslant 3\tau(n)\, B_\nu^{\omega_\nu(n)}. \tag{1.3}$$

De plus, on a également

$$f(n) \leqslant 3\,\frac{\log\log(2\tau(n))}{\sqrt{\log \tau(n)}} \qquad (n \geqslant 2) \tag{1.4}$$

et

$$f(n)/\tau(n) \leqslant 4\{\log(1+\Omega(n))/\Omega(n)\}^{1/3} \qquad (n \geqslant 2). \tag{1.5}$$

L'inégalité (1.3) implique en particulier

$$f(n) \ll \tau(n)^{1-c}, \tag{1.6}$$

avec $c = \frac{5}{3} - \log 3/\log 2 = 0{,}08\,170\,\ldots$, lorsque n est sans facteur carré. Il est probable qu'une telle estimation persiste en fait pour tout n, mais nous ne savons pas le démontrer.

Le problème de la valeur moyenne de $f(n)$ a été abordé dans [5]. Il est très délicat: comme Erdös et Hall le remarquent dans [3], une interversion de sommations ne semble pas pertinente, alors même que $f(n)$ est définie sous forme d'une somme. La majoration (1.3) utilisée avec $\nu = 1$ fournit immédiatement le résultat suivant.

COROLLAIRE. *On a pour x infini*

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \ll x(\log x)^\alpha \tag{1.7}$$

avec $\alpha = 2B_1 - 1 = 3 \cdot 4^{-1/3} - 1 = 0{,}88988\ldots,$

Cette estimation améliore sensiblement celle de [5] où l'exposant du logarithme valait $(1 + \log\log 2)/\log 2 = 0,\,91392\ldots$

La majoration (1.5) peut, au premier abord, paraître faible. Le résultat suivant montre que l'exposant $\frac{1}{3}$ ne peut y être remplacé par une constante dépassant 1.

THÉORÈME 2. *Pour une infinité d'entiers n, on a*

$$f(n)/\tau(n) \geqslant 1/(2\Omega(n)). \tag{1.8}$$

Nous établissons cela à la section 3. Nous construirons explicitement une suite d'entiers satisfaisant (1.8). Ces entiers sont tels que $\Omega(n) \sim \sqrt{\tau(n)}$. Ainsi, s'il existe une constante c telle que (1.6) soit réalisée pour tout $n \geqslant 1$, on a nécessairement $c \leqslant \frac{1}{2}$.

La question de la minoration de la valeur moyenne de $f(n)$ est restée longtemps en suspens. On a

$$f(n) \geqslant \omega(n) \qquad (n \geqslant 1) \tag{1.9}$$

car chaque diviseur premier de n contribue à $f(n)$. Cela implique que l'ordre moyen de $f(n)$ est au moins $\log \log n$ et Erdös et Hall conjecturent dans [3] qu'il dépasse toute puissance de $\log \log n$.

Nous sommes aujourd'hui en mesure d'établir cette conjecture, sous une forme plus forte. Nous obtenons le résultat d'une manière quelque peu inhabituelle: il découle d'une estimation de l'ordre *normal* d'une autre fonction liée aux diviseurs consécutifs, à savoir

$$h(n) := \sum \left\{ \frac{d_i}{d_{i+1}} : 1 \leqslant i \leqslant \tau(n), (d_i, d_{i+1}) = 1 \right\}.$$

THÉORÈME 3. *On a*

$$h(n) = (\log n)^{\log 3 - 1 + o(1)} \qquad \text{p.p.} \tag{1.10}$$

COROLLAIRE 1. *Pour $x \geqslant 3$, on a*

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \gg x(\log x)^{\log 3 - 1 + o(1)}. \tag{1.11}$$

Il est vraisemblable que la moyenne (1.11) est dominée par des entiers n possédant sensiblement plus de $(1 + o(1) \log \log n$ facteurs premiers. Cela suggère que l'exposant du logarithme dans (1.11) n'est pas optimal.

Bien entendu, l'estimation (1.10) fournit aussi une minoration de l'ordre normal de $f(n)$. En lui associant la majoration correspondante établie dans [5], nous pouvons énoncer:

COROLLAIRE 2. *On a*

$$(\log n)^{\log 3 - 1 + o(1)} \leqslant f(n) \leqslant (\log n)^{\log 2 - 1/2 + o(1)} \qquad \text{p.p.} \tag{1.12}$$

Il semble difficile de se faire même une opinion heuristique sur la valeur exacte de l'exposant normal.

L'ordre maximal de $f(n)$ présente également un problème ouvert. Nous pouvons montrer le résultat suivant, déjà mentionné dans [2], qui améliore considérablement l'estimation de Erdös et Hall apparaissant dans [3].

THÉORÈME 4. *Pour $x \geqslant 3$, on a*

$$\max_{n \leqslant x} f(n) \geqslant \exp\{((\log 2)^2 + o(1)) \log x/(\log_2 x)^2\}. \tag{1.13}$$

Ici et dans la suite nous désignons par $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

Posons

$$D(x) := \max_{n \leqslant x} \tau(n).$$

Il est bien connu que

$$\log D(x) \sim \log 2 \cdot \log x/\log_2 x$$

et il serait souhaitable de savoir s'il existe une constante positive c telle que

$$\max_{n \leqslant x} f(n) \geqslant D(x)^c.$$

Dans [3], on déduit une généralisation de $f(n)$ en posant pour tout entier $r \geqslant 2$

$$f_r(n) := \operatorname{card}\{i \in [1, \tau(n) - r + 1] : \max_{i \leqslant j < k < i+r} (d_j, d_k) = 1\}.$$

On a donc $f_2(n) = f(n)$. Pour $r \geqslant 3$, il n'existe pas de minoration non triviale de $f_r(n)$ analogue à (1.9). Plus précisément, nous pouvons montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 5. *Soit $r \geqslant 3$. Pour tout $k \geqslant 1$, il existe au moins un entier n tel que*

$$\omega(n) = k \qquad et \qquad f_r(n) = \begin{cases} 1 & (r = 3) \\ 0 & (r \geqslant 4). \end{cases}$$

Il serait intéressant d'estimer avec précision la quantité

$$F_r(x) := \max\{\tau(n) : n \leqslant x, f_r(n) \leqslant 1\}.$$

La construction utilisée pour la démonstration du théorème 5 fournit

$$F_r(x) > \log x/\log 4 \qquad (x \geqslant 16). \tag{1.14}$$

A l'opposé, il semble difficile d'exhiber des entiers pour lesquels $f_r(n)$ prend de grandes valeurs. La méthode conduisant au théorème 4 ne fonctionne pas lorsque $r \geqslant 3$, et nous ne pouvons obtenir dans ce cas qu'une minoration beaucoup plus faible.

THÉORÈME 6. *Soit $r \geqslant 3$. On a pour $x \geqslant 16$*

$$\max_{n \leqslant x} f_r(n) \geqslant \exp\{(\tfrac{1}{2} + o(1))(\log_2 x)^2/\log_3 x\}. \tag{1.15}$$

Cette borne est à rapprocher de celle qui a été obtenue pour $f(n) = f_2(n)$ dans [3]. Nous utilisons la même méthode ici.

Dans [7], Ivić et de Koninck introduisent une autre fonction liée aux diviseurs consécutifs,

$$H(n) := \sum_{1 \leqslant i < \tau(n)} (d_{i+1} - d_i)^{-1} \qquad (n \geqslant 2).$$

On sait que les diviseurs d'un entier "normal" ou "moyen" ont tendance à croître exponentiellement (cf. par exemple [6, *theorem* 13]). Il faut donc s'attendre à ce que $H(n)$ soit usuellement assez petite. Partant, la valeur de $H(n)$ doit être très sensible à la présence de diviseurs proches, et l'on peut considérer $H(n)$ comme une mesure de la proximité des diviseurs de n. Par exemple si $E(n) = \min(d_{i+1}/d_i) \geqslant 2$, on a $H(n) \leqslant 1$.

Ivić et de Koninck montrent dans [7] qu'il existe une constante $B = 1{,}77\ldots$ telle que

$$\sum_{n \leqslant x} H(n) = Bx + O(x(\log x)^{-1/3}). \tag{1.16}$$

Nous verrons à la section 7 que l'on peut améliorer notablement le terme d'erreur de cette estimation (formule (7.3)).

En ce qui concerne le comportement normal de $H(n)$ nous pouvons montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 7. *La fonction arithmétique $H(n)$ possède une mesure de répartition.*

Ainsi pour presque tout $z > 0$ la suite des entiers n tels que $H(n) \leqslant z$ possède une densité asymptotique $d(z)$. Nous ne savons pas si $d(z)$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0, +\infty[$. Par (1.16), on a $\int_0^\infty (1 - d(z))\, dz = B$.

Le problème des grandes valeurs de $H(n)$ est loin d'être résolu. On a par exemple

$$H(n) \geqslant \kappa(n) := \mathrm{card}\{d : d(d+1) \mid n\}$$

mais la fonction $\kappa(n)$ semble rétive à toute estimation non triviale. Il est ainsi très probable que $\kappa(n) \ll_\varepsilon \tau(n)^\varepsilon$ pour $n \geqslant 1$, mais même une majoration du type $\kappa(n) \ll \tau(n)^{1-c}$ avec $c > 0$ apparaît hors de portée. La meilleure minoration de l'ordre maximal de $\kappa(n)$ actuellement connue est celle d'Erdös et Hall [3]

$$\max_{n \leqslant x} \kappa(n) > (\log x)^{\sqrt{e} + o(1)} \qquad (x \to \infty). \tag{1.17}$$

En faisant appel à un résultat récent de Ivić et Tenenbaum [8] sur les entiers sans grand facteur premier et sans facteur carré, nous obtenons une estimation de l'ordre maximal de $H(n)$ bien supérieure à celle qui découle de (1.17).

THÉORÈME 8. *On a*

$$\max_{n \leqslant x} H(n) \geqslant \exp\{(\log x)^{1/2 + o(1))}\} \qquad (x \to \infty). \tag{1.18}$$

Nous ignorons si l'exposant $\frac{1}{2}$ figurant dans (1.18) est optimal. On peut majorer $H(n)$ en remarquant (cf. section 7) que l'on a

$$H(n) \leqslant \sum_{k \mid n} k^{-1} f(n/k) \qquad (n \geqslant 2). \tag{1.19}$$

En utilisant alors les estimations du théorème 1, nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 9. *On a uniformément pour* $n \geqslant 2$, $v \geqslant 1$,

$$H(n) \ll \tau(n)\, B_v^{\omega_v(n)} \log(1 + \omega(n)). \tag{1.20}$$

De plus

$$H(n)/\tau(n) \ll \{\log(1 + \Omega(n))/\Omega(n)\}^{1/3} \log(1 + \omega(n)). \tag{1.21}$$

On a donc $H(n) \ll \tau(n)/(\log \tau(n))^\delta$ pour $n \geqslant 2$ et tout $\delta < 1/3$. Ici encore il serait souhaitable de pouvoir disposer d'une majoration du type $\ll \tau(n)^{1-c}$.

Les auteurs tiennent à remercier A. Ivić pour ses utiles remarques sur une première version de ce travail.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Nous exploitons ici systématiquement un argument non publié d'Erdös et Simonovits correspondant au cas d'un entier n sans facteur carré.

Pour chaque entier $v \geqslant 1$, nous introduisons la fonction définie sur $[0, 1]$

$$A_v(\theta) := (1 + v^{-1})(v\theta)^\theta (1 - \theta)^{1-\theta}.$$

On a

$$A'_v(\theta)/A_v(\theta) = \log(v\theta/(1-\theta)), \tag{2.1}$$

de sorte que $A_v(\theta)$ décroît de $1+1/v$ à 1 sur $[0, 1/(v+1)]$ et croît de 1 à $v+1$ sur $[1/(v+1), 1]$.

Pour $v \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, nous définissons également une fonction fortement additive $m \mapsto \omega_v(m, n)$ par

$$\omega_v(p^j, n) := \begin{cases} 1 & (\text{si } p^{v+1} \nmid n) \\ 0 & (\text{si } p^{v+1} \mid n). \end{cases}$$

En particulier, on a $\omega_v(n, n) = \omega_v(n)$ pour tout $n \geqslant 1$. De plus $\omega_v(m, n) = \omega(m)$ dès que

$$v \geqslant V(n) := \max\{v : p^v \,\|\, n\}.$$

Lemme 2.1. (i) *Pour $v \geqslant 1$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}$, on a*

$$\tau(n)^{-1} \operatorname{card}\{d : d \mid n, \omega_v(d, n) \leqslant \theta\omega_v(n)\} \leqslant A_1(\theta)^{-\omega_v(n)}. \tag{2.2}$$

(ii) *Pour $v \geqslant 1$ et $0 \leqslant \theta \leqslant 1/(v+1)$, on a*

$$\tau(n)^{-1} \operatorname{card}\{d : d \mid n, \omega_v(d, n) \geqslant (1-\theta)\,\omega_v(n)\} \leqslant A_v(\theta)^{-\omega_v(n)}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Soit y, $0 < y \leqslant 1$, un paramètre que nous fixerons plus loin. Le membre de gauche de (2.2) n'excède pas

$$\tau(n)^{-1} \sum_{d \mid n} y^{\omega_v(d,n) - \theta\omega_v(n)} = \prod_{\substack{p^j \| n \\ j \leqslant v}} \left(\frac{1+jy}{1+j} \cdot y^{-\theta}\right).$$

Pour chaque $y \leqslant 1$, le terme général de ce produit est une fonction décroissante de j. Cette expression est donc

$$\leqslant \left(\frac{1+y}{2} \cdot y^{-\theta}\right)^{\omega_v(n)}.$$

Pour le choix optimal $y = \theta/(1-\theta) \leqslant 1$, on obtient la majoration annoncée.

Pour établir le point (ii), on procède de manière analogue, en se donnant un paramètre $z \geqslant 1$. L'expression suivante est alors un majorant du membre de gauche de (2.3)

$$\tau(n)^{-1} \sum_{d \mid n} z^{\omega_v(d,n) - (1-\theta)\omega_v(n)} = \prod_{\substack{p^j \| n \\ j \leqslant v}} \left(\frac{1+jz}{1+j} \cdot z^{\theta-1}\right)$$

$$\leqslant \left(\frac{1+vz}{1+v} \cdot z^{\theta-1}\right)^{\omega_v(n)}.$$

La valeur optimale de z est $(1-\theta)/v\theta \geqslant 1$, d'où le résultat souhaité.

LEMME 2.2 *Pour chaque $v \geqslant 1$, l'équation*

$$A_1\left(\frac{1-\theta}{2}\right) = A_v(\theta) \tag{2.4}$$

possède une solution unique θ_v dans l'intervalle $]0, 1/(v+1)[$. *En posant alors*

$$B_v := A_v(\theta_v)^{-1} < 1, \tag{2.5}$$

on a

$$f(n) \leqslant 3\tau(n)\, B_v^{\omega_v(n)} \qquad (n \geqslant 1). \tag{2.6}$$

Démonstration. Pour $0 \leqslant \theta \leqslant 1/(v+1)$, on peut écrire

$$A_v(\theta)/A_1\left(\frac{1-\theta}{2}\right) = \exp\{a_v(\theta)\}$$

avec

$$a_v(\theta) := \log\left(1+\frac{1}{v}\right) + \theta\log(v\theta) + \frac{1}{2}(1-\theta)\log(1-\theta)$$
$$-\frac{1}{2}(1+\theta)\log(1+\theta). \tag{2.7}$$

On vérifie sans peine que l'on a

$$a_v(0) = \log(1+1/v) > 0,$$
$$a_v\left(\frac{1}{v+1}\right) = \frac{1}{2v+2}\left\{v\log\left(1+\frac{1}{v}\right) - (v+2)\log\left(1+\frac{1}{v+1}\right)\right\} < 0,$$

et

$$a_v'(\theta) = \log(v\theta/\sqrt{1-\theta^2}) < 0.$$

Cela établit l'existence et l'unicité de θ_v. Lorsque $v = 1$, on a évidemment $\theta_1 = \frac{1}{3}$, d'où

$$B_1 = A_1(\tfrac{1}{3})^{-1} = 3 \cdot 2^{-5/3} = 0,94494\ldots .$$

Montrons (2.6). Lorsque l'indice $i \in [1, \tau(n)[$ contribue à $f(n)$, l'une au moins des trois éventualités suivantes est nécessairement réalisée:

(a) $\omega_v(d_i, n) \leqslant \frac{1}{2}(1-\theta_v)\,\omega_v(n)$,

(b) $\omega_v(d_{i+1}, n) \leqslant \frac{1}{2}(1-\theta_v)\,\omega_v(n)$,

(c) $\omega_v(d_i d_{i+1}, n) > (1-\theta_v)\,\omega_v(n)$.

Par le lemme 2.1(i), le nombre total des occurrences de (a) ou (b) ne dépasse pas

$$2\tau(n)\, A_1\left(\frac{1-\theta_v}{2}\right)^{-\omega_v(n)} = 2\tau(n)\, B_v^{\omega_v(n)}.$$

De plus, pour chaque diviseur d de n, l'équation $d = d_i d_{i+1}$ possède au plus une solution en $i \in [1, \tau(n)[$. Le lemme 2.1(ii) implique donc que la condition (c) est réalisée pour un nombre d'indices i n'excédant pas

$$\tau(n)\, A_v(\theta_v)^{-\omega_v(n)} = \tau(n)\, B_v^{\omega_v(n)}.$$

Cela établit la conclusion souhaitée.

LEMME 2.3. *On a*

$$B_v < \exp\left\{-\frac{1}{5(v+1)^2}\right\} \qquad (v \geqslant 1) \tag{2.8}$$

$$\log B_v \sim -\frac{1}{2v^2} \qquad (v \to \infty). \tag{2.9}$$

Démonstration. On a, pour $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\log A_1\left(\frac{1-\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\{(1+\theta)\log(1+\theta) + (1-\theta)\log(1-\theta)\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\theta \log\left(\frac{1+v}{1-v}\right) dv \geqslant \frac{1}{2}\theta^2. \tag{2.10}$$

Pour établir (2.7), il suffit donc de montrer que

$$\theta_v > \frac{\sqrt{2/5}}{(v+1)} \qquad (v \geqslant 1)$$

soit encore

$$a_v\left(\frac{\sqrt{2/5}}{v+1}\right) > 0. \tag{2.11}$$

Posons $h = \sqrt{\frac{2}{5}}$. En remarquant que, pour $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, on a

$$(1+\theta)\log(1+\theta) - (1-\theta)\log(1-\theta) = \int_0^\theta (2 + \log(1-v^2))\, dv \leqslant 2\theta,$$

on déduit de (2.7)

$$a_v\left(\frac{h}{v+1}\right) \geqslant \log\left(1+\frac{1}{v}\right) + \frac{h}{v+1}\log\left(\frac{hv}{v+1}\right) - \frac{h}{v+1}$$

$$> \frac{h}{v+1}\left\{Q(h) - \log\left(1+\frac{1}{v}\right)\right\}$$

avec $Q(h) := \log h - 1 + 1/h = 0{,}12299 > \log(\frac{9}{8})$. Cela établit (2.11) lorsque $v \geqslant 8$. On vérifie numériquement que cette inégalité persiste pour $1 \leqslant v \leqslant 7$.

Pour montrer (2.9), on remarque d'abord que (2.10) implique

$$\log B_v \sim -\tfrac{1}{2}\theta_v^2 \qquad (v \to \infty) \tag{2.12}$$

car $\int_0^\theta \log((1+v)/(1-v))\,dv \sim \theta^2$ lorsque $\theta \to 0$. Maintenant, d'après le lemme 2.2, il existe un $t_v \in \,]0, 1[$ tel que $\theta_v = t_v/v$. En reportant dans (2.7), il vient

$$a_v(\theta_v) = v^{-1}\{t_v \log t_v - t_v + 1\} + O(v^{-2}).$$

Cela implique

$$t_v \log t_v - t_v + 1 \to 0 \qquad (v \to \infty)$$

et finalement

$$t_v \to 1 \qquad (v \to \infty).$$

Par (2.12), cela équivaut à (2.9).

Fin de la démonstration du Théorème 1. Compte tenu de (2.6), il ne reste à démontrer que (1.4) et (1.5). Appliquons d'abord (2.6) avec $v = V(n)$, en majorant B_v selon (2.8). Il vient

$$f(n)/\tau(n) \leqslant 3 \exp\{-\omega(n)/5(V(n)+1)^2\}. \tag{2.13}$$

Cette majoration n'est efficace que lorsque $V(n)$ n'est pas trop grand. Dans la circonstance opposée, on remarque simplement que l'on a

$$f(n)/\tau(n) \leqslant 2/(V(n)+1) \tag{2.14}$$

puisque, étant donné un p tel que $p^{V(n)} \| n$, l'un ou l'autre de deux diviseurs consécutifs comptés par $f(n)$ est premier à p. En reportant tout à tour dans (2.13) les minorations trivials

$$\omega(n) \geqslant \Omega(n)/V(n), \qquad \omega(n) \geqslant \log(\tau(n)/\log(V(n)+1))$$

on obtient donc

$$f(n)/\tau(n) \leqslant \max_{v \geqslant 2} \min\{3e^{-\Omega(n)/(5v^3)}, 2/v\}$$

et

$$f(n)/\tau(n) \leqslant \max_{v \geqslant 2} \min\{3\tau(n)^{-1/(5v^2 \log v)}, 2/v\}.$$

Cela implique facilement (1.4) et (1.5).

3. Démonstration du Théorème 2

Nous allons montrer que l'inégalité (1.8) est satisfaite pour tous les entiers de la forme

$$n = p^k m$$

où $m = p_0 p_1 \cdots p_{r-1}$ est sans facteur carré et vérifie les conditions suivantes

(a) $k+1 = 2^r$,

(b) $(1+1/2k)\, 2^j < \log p_j/\log p \leqslant (1 + 1/2k + 1/2k^2)\, 2^j \ (0 \leqslant j < r)$.

D'après le théorème des nombres premiers, il existe pour tout couple $\{k, r\}$ satisfaisant (a) un entier $N = N(k, r)$ tel que les conditions (b) soient réalisables dès que $p > N$.

Pour chaque s, $0 \leqslant s \leqslant k$, considérons la décomposition dyadique

$$s = \sum_{0 \leqslant j < r} \varepsilon_j(s)\, 2^j$$

et désignons par m_s le diviseur de m défini par

$$m_s = \prod_{0 \leqslant j < r} p_j^{\varepsilon_j(s)}.$$

La condition (b) implique

$$\left(1 + \frac{1}{2k}\right) s \leqslant \frac{\log m_s}{\log p} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k^2}\right) s \qquad (0 \leqslant s \leqslant k) \tag{3.1}$$

de sorte que la suite ordonnée des diviseurs de m est exactement

$$1 = m_0 < m_1 < \cdots < m_k = m.$$

Pour chaque j, $1 \leqslant j \leqslant k$, on a

$$m_{j-1} < p^j.$$

Nous allons voir que m_{j-1} et p^j sont consécutifs en tant que diviseurs de n. En effet, considérons un diviseur d de n tel que $d < p^j$. Il existe alors un couple $\{h, t\} \in [0, j-1]^2$ tel que $d = p^h m_t$. Par (3.1), on peut donc écrire

$$j > \frac{\log d}{\log p} \geqslant h + \left(1 + \frac{1}{2k}\right) t \geqslant h + t,$$

d'où

$$h + t \leqslant j - 1.$$

En appliquant maintenant la majoration de (3.1), il vient

$$\frac{\log d}{\log p} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k^2}\right)(j-h-1)+h$$
$$< \left(1+\frac{1}{2k}\right)(j-1) - \frac{(h-1)}{2k}.$$

Cela implique $d \leqslant m_{j-1}$ lorsque $h \geqslant 1$. Mais si $h=0$, on a $d=m_t \leqslant m_{j-1}$.

Nous avons donc montré que m_{j-1} est le plus grand des diviseurs de n inférieurs à p^j. Comme $(m, p)=1$, il suit

$$f(n) \geqslant k > \frac{(k+1)^2}{2(k+r)} = \frac{\tau(n)}{2\Omega(n)}.$$

Cela achève la démonstration du théorème 2.

4. Démonstration du Théorème 3

Soit α un paramètre réel, $-\infty < \alpha \leqslant 1$. La fonction arithmétique

$$U(n, \alpha) := \operatorname{card}\{d, d' : dd' \mid n, (d, d')=1, |\log(d'/d)| \leqslant (\log n)^\alpha\}$$

a été étudiée dans [6, chap. 4 et 5]. On montre en particulier que l'on a pour chaque α l'évaluation

$$U(n, \alpha) \sim 1 + (\log n)^{\log 3 - 1 + \alpha + o(1)} \qquad \text{p.p.} \tag{4.1}$$

Ce résultat est le point de départ de notre démonstration. Il contient en particulier une confirmation de la conjecture d'Erdös mentionnée dans l'introduction—qui correspond au cas $\alpha \leqslant 0$.

Heuristiquement, notre idée pour appliquer (4.1) à l'étude de $h(n)$ est très simple. Elle repose sur l'hypothèse que, pour $\alpha < 0$, presque tous les couples $\{d, d'\}$ comptés dans $U(n, \alpha)$ sont en fait constitués de diviseurs consécutifs. Nous verrons que la mise en œuvre effective de ce principe, qui fournit la partie "minoration" de la formule asymptotique

$$h(n) = (\log n)^{\log 3 - 1 + o(1)} \qquad \text{p.p.,} \tag{4.2}$$

se heurte à des difficultés technique non négligeables.

Il est, en revanche, très facile d'obtenir la majoration de $h(n)$ contenue dans (4.2) à partir de la formule (4.1). On a effet pour tout $n \geqslant 1$ et tout $\alpha \in]-\infty, 1]$

$$h(n) \leqslant \tfrac{1}{2} U(n, \alpha) + \tau(n) \exp\{-(\log n)^\alpha\}. \tag{4.3}$$

Chacun des deux termes du membre de droite majore respectivement la contribution à $h(n)$ des indices $i \in [1, \tau(n)[$ tels que $\log(d_{i+1}/d_i)$ est inférieur, ou non, à $(\log n)^\alpha$. Comme on a classiquement

$$\tau(n) = (\log n)^{\log 2 + o(1)} \qquad \text{p.p.},$$

on voit que la majoration de (4.2) découle immédiatement de (4.1) et et (4.3).

Le reste de cette section est dévolu à la preuve de la minoration contenue dans (4.2).

Soit α un nombre réel fixé, $0 < \alpha < \log 3 - 1$. Pour chaque couple $\{d, d'\}$, $d < d'$, compté dans $U(n, -\alpha)$, on a

$$1/\mathrm{e} < d/d' < 1.$$

On peut donc écrire

$$h(n) \geqslant \frac{1}{2\mathrm{e}} U(n, -\alpha) - W(n, -\alpha) \tag{4.4}$$

avec

$$W(n, -\alpha) := \operatorname{card}\{d, d' : dd' \mid n, (d, d') = 1, \\ |\log(d'/d)| \leqslant (\log n)^{-\alpha}, \exists t \mid n : d < t < d'\}.$$

Autrement dit, $W(n, -\alpha)$ compte exactement le nombre de couples $\{d, d'\}$ contribuant à $U(n, -\alpha)$ et qui ne sont pas contitués de diviseurs consécutifs de n. Nous déduirons la minoration attendue pour $h(n)$ de l'estimation

$$W(n, -\alpha) \leqslant (\log n)^{\log 3 - 1 - 2\alpha + o(1)} \qquad \text{p.p.}, \tag{4.5}$$

valable pour chaque $\alpha > 0$ fixé.

Pour évaluer l'ordre normal de $W(n, -\alpha)$, nous avons recours à la "méthode paramétrique " décrite dans [6] et employée en particulier pour majorer $U(n, -\alpha)$—cf. [6, Chap. 5]. Posons

$$\Omega(n, t) := \sum_{\substack{p^\nu \| n \\ p \leqslant t}} \nu.$$

Un résultat bien connu d'Erdös (cf. [6, chap. 1]) implique

$$\sup_{1 \leqslant t \leqslant n} |\Omega(n, t) - \log_2 3t| = o(\log_2 n) \qquad \text{p.p.}$$

de sorte que, pour chaque valeur du paramètre y, $0 < y \leqslant 1$, on peut écrire

$$W(n, -\alpha) \leqslant (\log n)^{o(1)} W^*(n) \qquad \text{p.p.} \tag{4.6}$$

avec

$$W^*(n) := \sum_{dd'|n}{}' \sum_{\substack{t|n\\ d<t<d'}} y^{\Omega(n,d)}(\log 3d)^{-\log y} \tag{4.7}$$

où l'apostrophe indique que la sommation est restreinte aux couples de diviseurs $\{d, d'\}$ tels que

$$(d, d') = 1 \qquad \text{et} \qquad |\log(d'/d)| \leqslant (\log n)^{-\alpha}.$$

Nous allons montrer que, pour un choix convenable du paramètre y, on a

$$S^*(x) := \sum_{\sqrt{x}<n\leqslant x} W^*(n) \ll x(\log x)^{\log 3 - 1 - 2\alpha}(\log_2 x)^3. \tag{4.8}$$

Il est clair que (4.8) et (4.6) impliquent bien (4.5). Dans les calculs qui suivent, nous ferons systématiquement appel à la majoration

$$\sum_{x<n\leqslant x+z} y^{\Omega(n,t)} \ll z(\log t)^{y-1}, \tag{4.9}$$

valable uniformément pour $0 < y \leqslant 1$, $2 \leqslant t \leqslant x \leqslant z^2$. Cela découle par exemple d'un théorème de Shiu [10].

Soit $n \in]\sqrt{x}, x]$. Lorque la somme intérieure de (4.7) est non vide, posons $m = (d, t)$, $m' = (d', t)$. Il existe alors des entiers $r, r', s, h \geqslant 1$ tels que

$$d = mr, \quad d' = m'r', \quad t = mm's, \quad n = mm'rr'sh.$$

De plus, l'ensemble des conditions de sommation de (4.7) implique

$$mr < mm's < m'r' < mr(1+\eta) \tag{4.10}$$

où l'on a posé

$$\eta := 2(\log x)^{-\alpha}.$$

Il est capital de remarquer dès à présent que nous devons impérativement tirer avantage du fait que les deux premières inégalités de (4.10) sont strictes: si l'égalité était permise, on pourrait avoir $m = r' = s = 1$, ce qui correspond essentiellement à remplacer $W^*(n)$ par $U(n, -\alpha)$— et interdit *ipso facto* une estimation telle que (4.8).

D'après (4.10), $mr \geqslant 1/\eta$. Donc $d \to \infty$ avec x et l'on a pour x assez grand

$$k := mm'rr's < d^4,$$

d'où

$$\Omega(k, d) \geqslant \Omega(k) - 3.$$

On peut donc écrire

$$S^*(x) \leqslant y^{-3} \sum_{mm'rr's \leqslant x}^{\dagger} (\log 3mr)^{-\log y} y^{\Omega(mm'rr's)} \times \sum_{h \leqslant x/mm'rr's} y^{\Omega(h,mr)}$$

où l'obèle indique que les variables de sommation sont soumises à la condition (4.10). D'après (4.9), la somme intérieure ci-dessus est

$$\ll \frac{x}{mm'rr's} \{(\log 3mr)^{y-1} + (\log(3x/m^2m'^2s^3))^{y-1}\}. \tag{4.11}$$

Nous désignons respectivement par S_1^* et S_2^* les contributions à $S^*(x)$ provenant des sous-domaines définis par les inégalités $m^2m'^2s^{5/2} \leqslant \sqrt{x}$ et $m^2m'^2s^{5/2} > \sqrt{x}$. On vérifie aisément que le premier des deux termes entre accolades de (4.11) domine dans S_1^*, le second dans S_2^*.

Considérons d'abord S_1^*. La somme partielle en r' ne dépasse pas

$$\sum_{ms < r' < ms(1+\eta)} y^{\Omega(r')}(r')^{-1} \ll \eta \log_2 x \cdot (\log 3ms)^{y-1}. \tag{4.12}$$

C'est ici que l'on utilise de manière cruciale le fait que l'inégalité $ms < r'$ est stricte, qui implique donc $ms > 1/\eta$. Lorsque $ms > 1/\eta^2$, la relation (4.12) découle de (4.9). Dans le cas contraire, on a $1/\eta < ms \leqslant 1/\eta^2$ et l'on peut se contenter de la majoration triviale obtenue en remplaçant y par 1.

On peut traiter similairement la somme en r. Posant $A := y - 1 - \log y$, on obtient

$$\sum_{m's/(1+\eta) < r < m's} (\log 3mr)^A y^{\Omega(r)} r^{-1} \ll \eta \log x \cdot (\log 3mm's)^A (\log 3m's)^{y-1}.$$

Il vient ainsi

$$S_1^* \ll_y (\eta \log_2 x)^2 \sum_{m^2m'^2s^3 \leqslant 2x} (\log 3ms)^{y-1} (\log 3m's)^{y-1} \times (\log 3mm's)^A y^{\Omega(mm's)} (mm's)^{-1}, \tag{4.13}$$

où, par symétrie, nous pouvons supposer que $m' \leqslant m$. La somme en s relève de (4.9). En considérant séparément les intervalles $1 \leqslant s \leqslant m'$, $m' < s \leqslant m$, et $s > m$, que l'on traite par sommation d'Abel, on trouve qu'elle est

$$\ll_y (\log 3m)^B (\log 3m')^C$$

avec $B := 2y - 2 - \log y$, $C := 2y - 1$, pourvu que l'on ait $C < 0$ et $B + C < 0$. Ces deux dernières conditions sont sûrement satisfaites lorsque $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$.

On peut donc écrire

$$S_1^* \ll_y x(\eta \log_2 x)^2\, T$$

avec

$$T := \sum_{m \leqslant x} (\log 3m)^B \frac{y^{\Omega(m)}}{m} \sum_{m' \leqslant m} (\log 3m')^C \frac{y^{\Omega(m')}}{m'}.$$

Par sommation d'Abel, à partir de (4.9), on montre que la somme intérieure est

$$\ll_y \log_2 x \cdot (\log 3m)^D$$

avec $D := \max(3y - 1, 0)$. En faisant encore une fois appel à (4.9), il vient finalement

$$T \ll_y \log_2 x (\log x)^E$$

avec $E := y + B + D = 3y - 2 - \log y + \max(3y - 1, 0) > 0$. Pour le choix $y = \frac{1}{3}$, on a $E = \log 3 - 1$, d'où

$$S_1^* \ll x(\log x)^{\log 3 - 1 - 2\alpha}(\log_2 x)^3, \tag{4.14}$$

c'est-à-dire une majoration compatible avec l'estimation souhaitée (4.8).

Le traitement de S_2^* est semblable à celui de S_1^* ; nous nous contenterons d'en indiquer les grandes lignes. Les sommes partielles en r et r' étant majorées comme précédemment, on parvient à l'estimation pendante de (4.13)

$$S_2^* \ll_y x(\eta \log_2 x)^2 (\log x)^{y - 1 - \log y}\, V \tag{4.15}$$

avec

$$V := \sum_{\substack{\sqrt{x} < m^2 m'^2 s^3 \leqslant 2x \\ m' \leqslant m}} (\log 3m's)^{y-1} (\log(3x/m^2 m'^2 s^3))^{y-1} y^{\Omega(mm's)}/mm's.$$

Nous évaluons la somme intérieure en s, disons $\sum(m, m')$, en distinguant deux cas, selon que l'on a ou non $m^2 m'^5 \leqslant x$.

Dans le premier cas on obtient grâce à (4.9), en considérant tour à tour les intervalles de sommation $s \leqslant m'$ et $m' < s \leqslant (2x/m^2 m'^2)^{1/3}$,

$$\sum(m, m') \ll_y (\log(3x/m^2 m'^5))^{y-1} (\log 3m')^{2y-1},$$

à condition que $0<y<1/2$. La contribution correspondante à V est

$$\ll_y \sum_{m^2m'^5 \leqslant x} (\log 3m')^{2y-1}(\log(3x/m^2m'^5))^{y-1}\frac{y^{\Omega(mm')}}{mm'}$$

$$\ll_y \log_2 x \cdot \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} (\log(3x/m^2))^{y-1+\max(3y-1,0)}\frac{y^{\Omega(m)}}{m}$$

$$\ll_y \log_2 x \cdot (\log x)^{2y-1+\max(3y-1,0)}.$$

Dans le second cas, on a nécessairement $s \leqslant m'$. Donc

$$\sum (m, m') \ll_y (\log 3m')^{y-1}(\log(3x/m^2m'^2))^{2y-1}.$$

La contribution correspondante à V est alors

$$\ll_y \sum_{\substack{m^2m'^2 \leqslant 2x \\ m'^5 > x/m^2}} (\log 3m')^{y-1}(\log(3x/m^2m'^2))^{2y-1}\frac{y^{\Omega(mm')}}{mm'}$$

$$\ll_y \sum_{m \leqslant \sqrt{2x}} (\log(3x/m^2))^{4y-2}\frac{y^{\Omega(m)}}{m} \ll_y (\log x)^{5y-2}$$

à condition que $\frac{1}{4}<y<\frac{1}{2}$.

Finalement, nous obtenons

$$V \ll_y \log_2 x \cdot (\log x)^{2y-1+\max(3y-1,0)}.$$

En reportant cette estimation dans (4.15) et en choisissant $y=\frac{1}{3}$, on voit que la majoration (4.14) est également valable pour S_2^*, et partant pour S^*. Cela achève la preuve de (4.8), et donc de (4.2).

5. Démonstration du Théorème 4

Puisque $f(n) \leqslant \tau(n)$, un entier n susceptible de fournir de grandes valeurs de $f(n)$ doit posséder "beaucoup" de diviseurs. Notre choix, qui n'est peut-être pas optimal, consiste à considérer un produit de nombres premiers consécutifs. Plus précisément, si $2=p_1<p_2<\cdots$ désigne la suite croissante des nombres premiers, nous introduisons le plus grand entier $k=k(x)$ tel que

$$n := \prod_{i=1}^{k} p_i \leqslant x.$$

On a bien entendu $k \sim \log x/\log_2 x$.

Maintenant, le principe des tiroirs nous permet d'affirmer l'existence d'un réel t tel que n possède au moins

$$\tau(n)/(1+\log n) \sim 2^k/k \log k \tag{5.1}$$

diviseurs dans l'intervalle $]t, et]$. Nous désignons par $\{d_j: 1 \leqslant j \leqslant \tau(n)\}$ la suite croissante des diviseurs de n et supposons que $t < d_j \leqslant et$ pour $r < j \leqslant r+s$.

Les couples $\{d_j, d_{j+1}\}$, $r < j < r+s$, sont constitués de diviseurs consécutifs mais pas nécessairement premiers entre eux. Nous définissons un processus itératif pour obtenir simultanément les deux propriétés. A chaque couple $\{d_j, d_{j+1}\}$ nous associons le couple $\{d_{j'}, d_{j'+1}\}$ où j' est l'unique indice tel que $d_{j'} = d_j/(d_j, d_{j+1})$. Bien entendu j' n'appartient pas nécessairement à $]r, r+s[$. Si $(d_{j'}, d_{j'+1}) = 1$, nous sommes parvenus à nos fins, sinon nous recommençons la même opération. Au bout d'un nombre fini d'itérations nous atteignons ainsi un couple-image, disons $\{d_{h(j)}, d_{h(j)+1}\}$, tel que $(d_{h(j)}, d_{h(j)+1}) = 1$. La fonction $j \mapsto h(j)$ est à valeurs dans $[1, r+s[$ et possède les propriétés évidentes

(a) $d_{h(j)} \mid d_j$

(b) $d_{h(j)+1}/d_{h(j)} \leqslant d_{j+1}/d_j$.

Notre tâche consiste maintenant à minorer le cardinal de $h(]r, r+s[)$. Il est naturel d'introduire à cet effet la fonction de multiplicité

$$m(h) := \operatorname{card}\{j: r < j < r+s, h(j) = h\}$$

et l'ensemble image

$$H := \{h: 1 \leqslant h < r+s, m(h) > 0\}.$$

On a, $f(n) \geqslant \operatorname{card} H$, et d'après (5.1)

$$\sum_{h \in H} m(h) = s-1 \sim 2^k/k \log k. \tag{5.2}$$

Il nous faut donc une majoration de $m(h)$.

Soit $h \in H$ un indice fixé et $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, avec $m = m(h)$, les indices de $]r, r+s[$ tels que $h(j_1) = \cdots = h(j_m) = h$. D'après (b) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} e > \prod_{r<j<r+s} (d_{j+1}/d_j) &\geqslant \prod_{1 \leqslant u \leqslant m} (d_{j_u+1}/d_{j_u}) \\ &\geqslant (d_{h+1}/d_h)^m \geqslant (1+1/d_h)^m. \end{aligned}$$

On a donc

$$m = m(h) \leqslant \{\log(1+1/d_h)\}^{-1} \leqslant d_h + 1. \tag{5.3}$$

Cette majoration nous sera utile lorsque d_h n'est pas trop grand. Dans le cas contraire, nous avons recours à l'estimation

$$m \leqslant \tau(n/d_h) = 2^{k-\omega(d_h)}$$

qui découle immédiatement du point (a). Comme on a trivialement

$$d_h \leqslant p_k^{\omega(d_h)},$$

il vient

$$m \leqslant 2^k d_h^{-\log 2/\log p_k}. \tag{5.4}$$

On déduit finalement de (5.3) et (5.4) que l'on a pour tout $h \in H$

$$m(h) \leqslant \max_{1 \leqslant d \leqslant n} \min(d+1, 2^k d^{-\log 2/\log p_k}).$$

Ce maximum est atteint lorsque d est solution de l'équation

$$d+1 = 2^k d^{-\log 2/\log p_k}.$$

Cela implique

$$(1 + \log 2/\log p_k) \log d \leqslant k \log 2,$$

et, puisque $\log p_k \sim \log k$,

$$m(h) \leqslant 2^k \exp\left\{-((\log 2)^2 + o(1)) \frac{k}{\log k}\right\} \qquad (k \to \infty).$$

En reportant cette estimation dans (5.2), on obtient une minoration de card H qui équivaut au résultat souhaité.

6. Étude de $f_r(n)$ lorsque $r \geqslant 3$

Montrons d'abord le théorème 5. Pour chaque entier $k \geqslant 1$, nous pouvons construire par récurrence un entier $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ satisfaisant à la propriété

$$\prod_{1 \leqslant i < j} p_i < p_j \leqslant 2 \prod_{1 \leqslant i < j} p_i \qquad (1 \leqslant j \leqslant k) \tag{6.1}$$

avec la convention usuelle qu'un produit vide vaut 1. Les diviseurs de n sont les 2^k entiers de la forme

$$d = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} p_j^{\varepsilon_j}$$

où les ε_j valent 0 ou 1. De plus, la condition (6.1) implique immédiatement que les diviseurs d sont rangés selon l'ordre lexicographique sur les mots $\varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \cdots \varepsilon_1$. En particulier, l'égalité $(d_i, d_{i+1}) = 1$ n'a lieu que si $d_{i+1} = p_j$ pour un j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Si $j = 1$, on a $\{d_1, d_2, d_3\} = \{1, p_1, p_2\}$ et l'indice $i = 1$ contribue à $f_3(n)$. Si $j > 1$, on a $d_{i+2} = p_1 p_j$, donc $(d_{i+1}, d_{i+2}) > 1$. Cela montr que $f_3(n) = 1$, $f_r(n) = 0$ $(r \geqslant 4)$, et achève la preuve du théorème 5.

Les inégalités (6.1) impliquent immédiatement que $p_1 = 2$ et, par récurrence sur j, que

$$2^{j-2} \leqslant \log p_j / \log 2 \leqslant 2^{j-1} \qquad (1 < j \leqslant k).$$

D'où

$$2^{k-1} \leqslant \log n / \log 2 \leqslant 2^k - 1.$$

Si l'on choisit, pour $x > 16$, $k = [(1/\log 2) \log(\log x / \log 2)]$, on a donc $x^{1/4} < n \leqslant x$ et

$$\tau(n) = 2^k > \log x / \log 4.$$

Cela établit (1.14).

Démontrons maintenant le théorème 6. Comme dans le cas $r = 2$, il est naturel de supposer que $f_r(n)$ prend de grandes valeurs lorsque n possède beaucoup de facteurs premiers. Nous choisissons ici n de la forme

$$n = \prod_{y < p \leqslant 2y} p \tag{6.2}$$

où le paramètre réel y est aussi grand que possible sous la contrainte $n \leqslant x$. D'après le théorème des nombres premiers, on a

$$y \sim \log x \qquad (x \to \infty). \tag{6.3}$$

Désignons par $z := \pi(2y) - \pi(y)$ le nombre de facteurs du produit (6.2) et donnons nous un paramètre entier k satisfaisant à

$$k < \log y / \log 2. \tag{6.4}$$

Il y a exactement $m := \binom{z}{k}$ diviseurs de n possèdant k facteurs premiers. Ces diviseurs sont tous dans l'intervalle $]y^k, (2y)^k]$ et la condition (6.4) garantit qu'aucun autre diviseur de n n'appartient à cet intervalle. Il existe donc un indice $t \in [1, 2^z - m]$ tel que, avec la notation (1.1), la suite des diviseurs de n ayant k facteurs premiers soit

$$\{d_j : t < j \leqslant t + m\}.$$

En utilisant simplement le fait que, pour $j \neq k$, $(d_j, d_k) > 1$ implique $(d_j, d_k) > y$ et donc $|d_j - d_k| > y$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}\{i \in [t, t+m-r+1] : \max_{i \leqslant j < k < i+r} (d_j, d_k) > 1\}\\ &\quad \leqslant \operatorname{card}\{i \in]t, t+m-r+1] : d_{i+r-1} - d_i > y\}\\ &\quad \leqslant y^{-1} \sum_{t < i \leqslant t+m-r+1} (d_{i+r-1} - d_i) \leqslant r(2^k - 1)\, y^{k-1}.\end{aligned}$$

Il vient donc

$$f_r(n) \geqslant \binom{z}{k} + 1 - r[1 + (2^k - 1)\, y^{k-1}]. \tag{6.5}$$

Pour le choix $k = [\log y / 2 \log_2 y]$, on vérifie facilement que le membre de droite de (6.5) vaut

$$(1 + o(1)) \frac{z^k}{k!} = \exp\left\{\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \frac{(\log y)^2}{\log_2 y}\right\}.$$

Au vu de (6.3), cela achève la preuve du théorème 6.

7. Étude de $H(n)$

Le lemme suivant, prouvé dans [6, *lemma* A2, p. 159] nous sera utile pour établir le théorème 7. Pour toute suite d'entiers $\mathscr{A}$, nous désignons par $\mathbf{d}\mathscr{A}$ (resp. $\bar{\mathbf{d}}\mathscr{A}$) sa densité naturelle (resp. densité supérieure).

Lemme. *Soit F une fonction arithmétique réelle. Supposons que, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $n \mapsto a(n, \varepsilon)$ telle que*

(i) $\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{T \to \infty} \bar{\mathbf{d}}\{n \geqslant 1 : a(n, \varepsilon) > T\} = 0$,

(ii) $\lim_{\varepsilon \to 0} \bar{\mathbf{d}}\{n \geqslant 1 : |F(n) - F(a(n, \varepsilon))| > \varepsilon\} = 0$,

(iii) *la densité $\mathbf{d}\{n \geqslant 1 : a(n, \varepsilon) = a\}$ existe pour chaque entier a fixé.*

Alors F possède une fonction de répartition.

Nous voulons appliquer ce résultat au cas de $F = H$, avec

$$a(n, \varepsilon) := \prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p \leqslant y}} p^\nu$$

où $y = y(\varepsilon)$ est un paramètre qui sera précisé par la suite. Le point (i) est réalisé: on a en fait (cf. [6, *theorem* 07])

$$\bar{\mathbf{d}}\{n \geqslant 1 : a(n, \varepsilon) > T\} \ll \exp\{-c \log T/\log y\}$$

pour une constante absolue positive c. La condition (iii) est également facile à vérifier: la densité en question vaut

$$a^{-1} \prod_{p \leqslant y} (1 - 1/p).$$

Il reste à établir la propriété (ii). Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier de n—avec la convention $P(1) = 1$. On a pour tout $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant H(n) - H(a(n, \varepsilon)) \leqslant G(n, y) := \sum_{\substack{1 \leqslant i < \tau(n) \\ P(d_i d_{i+1}) > y}} (d_{i+1} - d_i)^{-1}.$$

L'inégalité de droite est triviale. Celle de gauche provient, par itération, de l'inégalité évidente

$$(w - u)^{-1} < (w - v)^{-1} + (v - u)^{-1} \qquad (0 < u < v < w).$$

Nous allons montrer que l'on a pour $x \geqslant 1$, $y \geqslant 2$,

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} G(n, y) \ll y^{-1} (\log y)^3. \tag{7.1}$$

Il est clair que cette majoration implique (ii) en choisissant par exemple $y(\varepsilon) = 1/\varepsilon^2$.

On a

$$\sum_{n \leqslant x} G(n, y) = \sum_{\substack{u < v \\ P(uv) > y}} (v - u)^{-1} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ [u, v] \mid n \\ u < d < v \Rightarrow d \nmid n}} 1$$

$$\leqslant x \sum_{\substack{u < v \\ P(uv) > y}} (v - u)^{-1} [u, v]^{-1}.$$

Dans cette double somme, on a $v \geqslant P(uv) > y$, d'où

$$\sum_{n \leqslant x} G(n, y) \leqslant x R(y)$$

avec

$$R(y) := \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v > \max(u, y)} (v - u)^{-1} [u, v]^{-1}.$$

La somme intérieure peut encore s'écrire

$$\sum_{v>\max(u,y)} u^{-1}v^{-1}(v-u)^{-1} \sum_{d\mid(u,v)} \varphi(d)$$
$$= u^{-1}\sum_{d\mid u} \varphi(d) \sum_{m>\max(u/d,\, y/d)} m^{-1}d^{-1}(md-u)^{-1}$$
$$= u^{-1}\sum_{d\mid u} \varphi(d)\, d^{-2} \sum_{m>\max(u/d,\, y/d)} m^{-1}(m-u/d)^{-1}.$$

En comparant la somme intérieure à une intégrale, on montre sans difficulté qu'elle est

$$\ll \frac{d\log 2u}{u+y}.$$

Il suit

$$R(y) \ll \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\log 2u}{u(u+y)} \sum_{d\mid u} \frac{\varphi(d)}{d}$$
$$\ll \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\tau(u)\log 2u}{u(u+y)} \ll y^{-1}(\log y)^3 \tag{7.2}$$

où la dernière estimation découle, par sommation d'Abel, de l'évaluation classique

$$\sum_{u\leqslant w} \tau(u) \ll w\log 2w \qquad (w\geqslant 1).$$

Cela achève la démonstration du théorème 7.

La majoration (7.2) permet d'améliorer la qualité du terme d'erreur dans la formule asymptotique (1.16) due à Ivić et de Koninck. On a en fait

$$\sum_{n\leqslant x} H(n) = Bx + O(x(\log x)^{-1}(\log_2 x)^3). \tag{7.3}$$

Pour établir cela, on remarque d'abord que le principle d'inclusion–exclusion fournit pour tous u, v, $u<v$, $x>0$,

$$\operatorname{card}\{m\leqslant x : u<d<v \Rightarrow d\nmid m[u,v]\} = xR(u,v) + O(2^{v-u})$$

où la constante impliquée par le symbole de Landau est absolue et où $R(u,v)$ satisfait à $0\leqslant R(u,v)\leqslant 1$—cf. [7, *lemma* 2]. Posons

$$H_1(n,y) := \sum_{\substack{1\leqslant i<\tau(n)\\ d_{i+1}\leqslant y}} (d_{i+1}-d_i)^{-1}, \qquad H_2(n,y) := H(n) - H_1(n,y).$$

On peut alors écrire pour $y \geqslant 2$, $x > 0$,

$$\sum_{n \leqslant x} H_1(n, y) = \sum_{u < v \leqslant y} \frac{1}{v-u} \left\{ \frac{x}{[u, v]} R(u, v) + O(2^{v-u}) \right\}$$

$$= x \sum_{u < v \leqslant y} \frac{R(u, v)}{(v-u)[u, v]} + O(y^2 2^y) \tag{7.4}$$

et

$$\sum_{n \leqslant x} H_2(n, y) \leqslant \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v > \max(u, y)} \frac{x}{(v-u)[u, v]}$$

$$= xR(y) \ll xy^{-1}(\log y)^3.$$

Cette dernière estimation implique la convergence de la double somme de (7.4) et l'évaluation

$$\sum_{u < v \leqslant y} \frac{R(u, v)}{(v-u)[u, v]} = B + O(y^{-1}(\log y)^3).$$

D'où

$$\sum_{n \leqslant x} H(n) = Bx + O(xy^{-1}(\log y)^3 + y^2 2^y)$$

et finalement (7.3) en choisissant $y = \log x$.

Preuve du Théorème 8. Posons

$$\Psi(z, y) := \sum_{\substack{m \leqslant z \\ P(m) \leqslant y}} 1, \qquad \Psi_1(z, y) := \sum_{\substack{m \leqslant z \\ P(m) \leqslant y}} \mu(m)^2.$$

Notre démonstration repose sur les deux résultats suivants, dus respectivement à de Bruijn [1] et Ivić–Tenenbaum [8]

$$\Psi_1(z, y) \gg_\varepsilon z^{1/2 + \varepsilon/5} \qquad ((\log z)^{2+\varepsilon} \leqslant y \leqslant z) \tag{7.5}$$

$$\Psi_1(z, y) \gg_\varepsilon \Psi(z, y) \qquad ((\log z)^{2+\varepsilon} \leqslant y \leqslant z). \tag{7.6}$$

Considérons un entier n de la forme

$$n = \prod_{p \leqslant y} p$$

où y est aussi grand que possible sous la contrainte $n \leqslant x$. Si $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_\tau = n$ désigne la suite croissante des diviseurs de n, alors $\Psi_1(z, y)$ est égal au nombre des indices j tels que $d_j \leqslant z$. De plus, on a trivialement

$$\max_{1 \leqslant j < \tau(n)} d_{j+1}/d_j \leqslant y \tag{7.7}$$

(en fait, cette quantité est égale à 2—cf [4, p. 19]—mais nous n'en aurons pas besoin).

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $z = \exp\{y^{1/2-\varepsilon}\}$, et désignons par k le plus grand indice tel que $d_k \leqslant z$. On a

$$\begin{aligned}\Psi_1(z, y) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} 1 &\leqslant \left\{ \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} (d_{j+1} - d_j)^{-1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} (d_{j+1} - d_j) \right\}^{1/2} \\ &\leqslant \{H(n)\, d_{k+1}\}^{1/2} \leqslant \{H(n)\, yz\}^{1/2},\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de (7.7). En utilisant (7.5) et (7.6), il vient donc

$$H(n) \geqslant \Psi_1(z, y)^2\, y^{-1} z^{-1} \gg_\varepsilon z^{\varepsilon/3};$$

comme $y \sim \log x$, il suit

$$H(n) \gg_\varepsilon \exp\left\{ \frac{\varepsilon}{3} (\log x)^{1/2-\varepsilon} (1 + o(1)) \right\}$$

d'où (1.18), puisque ε peut être choisi arbitrairement petit.

Preuve du Théorème 9. On a clairement pour tout $n \geqslant 2$

$$H(n) \leqslant \sum_{k \mid n} k^{-1} \sum_{(d_i, d_{i+1}) = k} 1. \tag{7.8}$$

Pour chaque k fixé, posons $m = n/k$ et désignons les diviseurs successifs de m par $1 = m_1 < m_2 < \cdots < m_r = m$. Dans la somme intérieure de (7.8), on a nécessairement

$$d_i = m_j k, \qquad d_{i+1} = m_{j+1} k$$

pour un certain j, $1 \leqslant j \leqslant r$, tel que $(m_j, m_{j+1}) = 1$. On peut donc écrire

$$H(n) \leqslant \sum_{k \mid n} k^{-1} f(n/k). \tag{7.9}$$

En utilisant la majoration (1.3) pour estimer $f(n/k)$ et en remarquant que la fonction multiplicative $m \mapsto \tau(m)\, B_v^{\omega_v(m)}$ est croissante sur chaque suite $\{p^j : j = 1, 2, \ldots\}$, il suit

$$\begin{aligned} H(n) &\leqslant 3\tau(n)\, B_v^{\omega_v(n)} \sum_{k \mid n} k^{-1} \\ &\ll \tau(n)\, B_v^{\omega_v(n)} \exp\left\{ \sum_{p \mid n} p^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Comme on a $\sum_{p|n} p^{-1} \leqslant \sum_{p \leqslant p_\omega} p^{-1} \leqslant \log_2(2+\omega(n)) + O(1)$, cela établit (1.20).

Pour montrer (1.21), on fait appel à (1.5) pour majorer $f(n/k)$ dans (7.9). Nous laissons au lecteur la vérification facile du fait que la fonction

$$M(n) := \tau(n)\{\log(1+\Omega(n))/\Omega(n)\}^{1/3}$$

satisfait

$$M(pm) \geqslant M(m) \qquad (m \geqslant 2,\ p \geqslant 2).$$

Cela implique

$$H(n) \leqslant 4M(n) \sum_{k|n} k^{-1} \ll M(n) \log(1+\omega(n))$$

et achève ainsi la démonstration du théorème 9.

Références

1. N. G. de Bruijn, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **69**, 239–247 (= *Indag. Math.* **28** (1966), 239–247).
2. P. Erdös, Some solved and unsolved problems of mine in number theory, *in* "Topics in Analytic Number Theory" (Sidney W. Graham and Jeffrey Vaaler, Eds.), pp. 59–75, Univ. of Texas Press, Austin, 1985.
3. P. Erdös and R. R. Hall, On some unconventional problems on the divisors of integers, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **25** (1978), 479–485.
4. P. Erdös et G. Tenenbaum, Sur la structure de la suite des diviseurs d'un entier, *Ann. Inst. Fourier* **31** (1) (1981), 17–37.
5. P. Erdös et G. Tenenbaum, Sur les diviseurs consécutifs d'un entier, *Bull. Soc. Math. France* **111** (1983), 125–145.
6. R. R. Hall and G. Tenenbaum, "Divisors," Cambridge Univ. Press, London/New York, 1988.
7. A. Ivić and J.-M. de Koninck, On the distance between consecutive divisors of an integer, *Canad. Math. Bull.* **29** (2) (1986), 208–217.
8. A. Ivić and G. Tenenbaum, Local densities over integers free of large prime factors, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **37** (1986), 401–417.
9. H. Maier and G. Tenenbaum, On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76** (1984), 121–128.
10. P. Shiu, A Brun–Titchmash Theorem for multiplicative functions, *J. Reine Angew. Math.* **313** (1980), 161–170.
11. G. Tenenbaum, Un problème de probabilité conditionnelle en arithmétique, *Acta Arith.* **49** (1987), 165–187.

Printed by Catherine Press, Ltd., Tempelhof 41, B-8000 Brugge, Belgium